

# ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS MATEMÁTICOS Y SU APLICACIÓN A LA DIGESTIÓN ANAEROBIA

## *SOME CONSIDERATIONS ABOUT MATHEMATICAL MODELS AND THEIR APPLICATION TO ANAEROBIC DIGESTION*

Diego Armando. Yugla Lema <sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Unidad Educativa “Ramón Barba Naranjo” cantón Latacunga, provincia Cotopaxi, Ecuador. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7264-546X>. Correo: [diego.yugla@educacion.gob.ec](mailto:diego.yugla@educacion.gob.ec)

\* Autor para correspondencia: [diego.yugla@educacion.gob.ec](mailto:diego.yugla@educacion.gob.ec)

### Resumen

El objetivo de este trabajo es explorar algunas consideraciones clave relacionadas con los modelos matemáticos aplicados a la digestión anaerobia, lo cual se logra a partir de una investigación bibliográfica sobre los modelos matemáticos y los métodos deductivo e inductivo, los que permitieron arribar a las siguientes conclusiones: Los modelos matemáticos desempeñan un papel crucial en la comprensión y predicción de los procesos asociados con la digestión anaerobia. Desde la caracterización de la cinética de degradación de sustratos hasta la simulación del comportamiento dinámico de los reactores anaerobios, estos modelos ofrecen una herramienta poderosa para los investigadores y profesionales del campo. La diversidad de enfoques y técnicas utilizadas en la formulación de modelos matemáticos refleja la complejidad inherente de la digestión anaerobia. Desde modelos cinéticos simples basados en ecuaciones de Monod hasta modelos más complejos que tienen en cuenta la dinámica de la población microbiana y la transferencia de masa y energía, existe una gama de opciones disponibles para adaptarse a diferentes contextos y objetivos de investigación. Las aplicaciones prácticas de los modelos matemáticos en la digestión anaerobia son numerosas y variadas. Desde la optimización del diseño y la operación de plantas de tratamiento de aguas residuales hasta la evaluación del potencial de producción de biogás a partir de diferentes sustratos, estos modelos ofrecen herramientas valiosas para la toma de decisiones informadas en el ámbito ambiental y energético.

**Palabras clave:** aplicación; digestión anaerobia; modelos matemáticos

### Abstract

*The objective of this work is to explore some key considerations related to the mathematical models applied to anaerobic digestion, which is achieved from a bibliographic research on the mathematical models and the deductive and inductive methods, which allowed us to reach the following conclusions: Mathematical models*

*play a crucial role in understanding and predicting the processes associated with anaerobic digestion. From the characterization of substrate degradation kinetics to the simulation of the dynamic behavior of anaerobic reactors, these models offer a powerful tool for researchers and professionals in the field. The diversity of approaches and techniques used in formulating mathematical models reflects the inherent complexity of anaerobic digestion. From simple kinetic models based on Monod equations to more complex models that take into account microbial population dynamics and mass and energy transfer, there is a range of options available to suit different contexts and research objectives. And the practical applications of mathematical models in anaerobic digestion are numerous and varied. From optimizing the design and operation of wastewater treatment plants to evaluating the potential for biogas production from different substrates, these models offer valuable tools for making informed decisions in the environmental and energy spheres.*

**Keywords:** *application; anaerobic digestion; mathematical models*

**Fecha de recibido:** 10/01/2024

**Fecha de aceptado:** 14/03/2024

**Fecha de publicado:** 19/03/2024

## Introducción

La digestión anaerobia, un proceso biológico fundamental en la degradación de materia orgánica sin la presencia de oxígeno, ha sido objeto de estudio y aplicación en diversas disciplinas científicas y tecnológicas. En este contexto, los modelos matemáticos han emergido como herramientas poderosas para comprender, predecir y optimizar los procesos asociados con la digestión anaerobia. Estos modelos permiten la representación cuantitativa de los fenómenos involucrados, facilitando así la toma de decisiones informadas en el diseño y operación de sistemas de tratamiento de residuos orgánicos, producción de biogás y gestión sostenible de recursos.

El objetivo de este trabajo es explorar algunas consideraciones clave relacionadas con los modelos matemáticos aplicados a la digestión anaerobia. Para ello, comenzaremos examinando los fundamentos biológicos y cinéticos de la digestión anaerobia, destacando los procesos microbiológicos y bioquímicos involucrados en la conversión de sustratos orgánicos en productos útiles como biogás y fertilizantes. Posteriormente, nos adentraremos en la conceptualización y formulación de modelos matemáticos que describen estos procesos, discutiendo las diferentes aproximaciones y enfoques utilizados en la literatura científica.

En última instancia, este trabajo pretende ofrecer una visión integral de la interacción entre los modelos matemáticos y la digestión anaerobia, resaltando su importancia en la búsqueda de soluciones innovadoras y sostenibles para los desafíos ambientales y energéticos de la actualidad.

## Materiales y métodos

El artículo se sustentó en una investigación bibliográfica sobre los modelos matemáticos y su aplicación a la digestión anaerobia, lo cual se complementa con los métodos deductivo e inductivo, los que permitieron arribar a conclusiones.

## Resultados y discusión

Los modelos matemáticos que permiten establecer relaciones entre variables, parámetros y restricciones que rigen las condiciones de un fenómeno o comportamiento de un problema. Tienen aplicación en todas las áreas del conocimiento y son ampliamente utilizados por las ventajas que ofrecen, debido a que permiten predecir el desenvolvimiento o desarrollo de diversos procesos o resolver problemas con rapidez y efectividad.

La modelación tiene como objetivo consolidar aspectos que le confieran robustez y efectividad al modelo; entre los cuales se mencionan: simplicidad, universalidad, sensibilidad, objetividad y estabilidad. Los modelos matemáticos cumplen con características que rigen su funcionalidad y aplicación en el campo de estudio. Los elementos que constituyen un modelo matemático son: variables, los parámetros o valores conocidos para las variables del modelo, las restricciones son los límites matemáticos que dan soporte a la validez de los resultados del modelo, las relaciones entre variables se basan en teorías constituidas que forman la base del conocimiento y las representaciones matemáticas que pueden ser ecuaciones y funciones (Gershenfeld, 1999).

Según la información empleada pueden ser heurísticos y empíricos. Los modelos heurísticos se fundamentan en posibles determinaciones en función de los fenómenos estudiados. Los modelos empíricos son diseñados en base a datos experimentales o experiencias reales.

En concordancia con la aleatoriedad, se clasifican en determinista y estocástico. La incertidumbre difiere entre uno y otro. A diferencia del modelo determinista, el estocástico existe distribución de probabilidad, debido a la incertidumbre en el valor de las variables consideradas. Según el tipo de representación, pueden ser cuantitativos o cualitativos. La diferencia entre estos modelos es la precisión numérica que caracteriza a las estructuras cuantitativas.

Finalmente, según la aplicación, pueden ser modelados de control, optimización y simulación. Los modelos de control se ajustan en función de los resultados deseados, en la optimización se emplean para hallar soluciones más efectivas en la resolución de problemáticas y en la simulación se focalizan en predecir o estimar los resultados que se obtendrán en un determinado proceso que normalmente se realiza de forma empírica (Gershenfeld, 1999).

### Modelos aplicables en la digestión anaerobia

El proceso de digestión anaerobia ha sido evaluado mediante varios modelos que han demostrado su efectividad según las características del residuo (sustrato), el régimen de operación y las condiciones experimentales. Por consiguiente, cada modelo demuestra su efectividad en función de varios parámetros que deben ser considerados previo a la elección del modelo.

En este sentido, el modelo de Gompertz se basa en adecuaciones de la ecuación de Monod, puesto que se considera la velocidad máxima y el tiempo de retardo del proceso anaeróbico. Cabe mencionar que el período

de retardo o tiempo lag es un período de adaptación, en la que los microorganismos asimilan las condiciones y el desarrollo del proceso. En la curva de producción de metano, el punto de inflexión se calcula con la tangente de la función o intersección en el punto máximo de la velocidad de reacción (Velázquez-Martí et al., 2018).

Otro modelo empleado es el de Función de Transferencia, que es similar al modelo exponencial, no obstante, introduce el tiempo de retardo y en lugar de la constante cinética, toma en cuenta la velocidad máxima respecto al rendimiento máximo de metano. Para sustratos con alta recalcitrancia o restricciones al proceso de digestión anaerobia, como el caso de los residuos sólidos, este modelo es de gran valía y presenta ventajas sustanciales respecto al modelo de Roediger (McCarty & Mosey, 1991; Jeyaseelan, 1997).

El modelo de Fitzhugh es también similar al modelo de primer, sin embargo, esta ecuación considera la variable  $n$ , que actúa como corrector de los parámetros para ajustar a un modelo exponencial. Si bien es empleado en la modelación matemática de diversos residuales y/o sustratos, su aplicabilidad pierde acción, cuando el parámetro  $n$  tiene que adaptar los datos obtenidos con amplia dispersión a una función exponencial permanente (McCarty & Mosey, 1991).

Por su parte, en el modelo de primer orden (Roediger) se ha establecido que la etapa hidrolítica se constituye en la operación más compleja e influyente en la digestión y por lo tanto, el rendimiento máximo de metano y la constante cinética son evaluadas durante el desarrollo del modelo.

Cabe indicar, que se ha determinado que los procesos biológicos tienen una tendencia hacia ecuaciones de primer orden, es decir, la simulación mediante modelos de este tipo permite reflejar que pueden tener alta correlación con los resultados experimentales o reales (Edeline, 1980).

### Modelo de Roediger

El modelo de Roediger es una ecuación de primer orden que permite simular y predecir el rendimiento de metano en la digestión biológica de residuos o sustratos con alto contenido de materia orgánica. Este modelo considera entre sus variables, el rendimiento máximo de metano, el cual se obtiene experimentalmente, así como una constante cinética y el tiempo de operación, según la ecuación 1 (Edeline, 1980).

$$Y_{CH_4} = Y_{max}(1 - e^{-k_0 t}) \quad (1)$$

Donde:

Rendimiento de metano:  $Y_{CH_4}$  (Volumen (L) de CH<sub>4</sub>/ DQO \* día)

Demanda química de oxígeno: DQO (mg/L)

$e$ : función exponencial

Constante cinética:  $k_0$  (día<sup>-1</sup>)

Tiempo:  $t$  (día)

A diferencia de los demás modelos matemáticos empleados en la digestión anaerobia, el modelo de Roediger permite evaluar la incidencia de variables como el rendimiento máximo, tiempo de operación ( $d$ ) y la constante cinética ( $d^{-1}$ ). Además, los procesos bioquímicos relacionados con microorganismos, como es el caso del tratamiento que se plantea en la presente investigación tienen afinidad con los procesos lineales de primer orden (Edeline, 1980).

Modelados como el de Gompertz, Fitzhugh, de Función de Transferencia, Cone y Suma de errores cuadráticos (Kythreotou et al., 2014) han probado ser efectivos en la evaluación de parámetros de la digestión anaerobia; no obstante, como se menciona anteriormente, la ecuación de primer orden considera parámetros cinéticos y rendimientos máximos termodinámicos, que desean ser validados para determinar su relación e influencia en la predicción del rendimiento de metano, para así determinar el grado de varianza entre el resultado simulado y reportes experimentales basados en evidencias científicas.

### **Evaluación del modelo**

La evaluación permite cuantificar la incertidumbre de un modelo a través de la comparación de sus predicciones y los datos experimentales. Cabe indicar que los datos utilizados para realizar las pruebas con el modelo no deben ser parte de la validación del modelo, debido a que muy comúnmente los datos contienen errores, es por esta razón que a veces es suficiente demostrar que no hay diferencias estadísticamente significativas entre los datos experimentales y las predicciones obtenidas a partir del modelo.

Para determinar el grado de confianza de un modelo se debe tomar en cuenta su base de datos de validación. Por lo tanto, las validaciones del modelo con datos experimentales obtenidos en condiciones diferentes son necesarias. Por otra parte, se debe tener en cuenta que las diferencias entre los datos y las predicciones del modelo se pueden medir por comparación gráfica, intervalos de confianza y pruebas estadísticas. Las pruebas de hipótesis son particularmente útiles en la comparación de las distribuciones, variaciones o series de tiempo de los resultados del modelo para determinar si las predicciones del modelo se encuentran dentro de un rango aceptable de precisión.

### **Análisis de error**

El análisis de regresión lineal ha estado entre las herramientas que se aplican con mayor frecuencia en el análisis del error. En el análisis de datos experimentales se ha empleado para definir la relación que permite cuantificar la distribución entre las variables que componen el modelo y también en la verificación de la validez de los modelos de procesos físico-químicos como adsorción, digestión biológica, diseño de reactores, reacciones oxidativas de remediación de contaminantes, procesos catalíticos homogéneos y heterogéneos (Edgar & Himmelblau, 1989; Hanna & Sandall, 1995).

Por otra parte, la regresión no lineal se ha convertido en una herramienta inevitable, ya que proporciona un método matemático riguroso para determinar los parámetros de múltiples procesos, considerando la forma original de ecuaciones isotérmicas. A diferencia de la regresión lineal, la regresión no lineal generalmente implica la minimización de la distribución de errores entre datos experimentales y los valores predichos por el modelo en función de criterios de convergencia (Kumar & Sivanesan, 2006). Cabe mencionar que estas operaciones ya no se constituyen como un método computacionalmente difícil debido a la disponibilidad de algoritmos informáticos (Theivarasu & Mysamy, 2011).

### **Determinación de los estadígrafos**

Entre los estadígrafos más aplicados para determinar el error o diferencias entre valores predichos (modelo matemático) se encuentran índices con diversas operaciones matemáticas. En la actualidad, se pueden calcular mediante herramientas computacionales, evitando de esta forma el proceso iterativo manual que en algunos casos conlleva a equivocaciones.

En este trabajo se emplearon los siguientes estadígrafos para ajustar el modelo de Roediger en la predicción del rendimiento de metano producido en la digestión anaerobia de las aguas residuales del café. Ayawei et al. (2017) proponen una revisión general de las isothermas de adsorción y sus aplicaciones en otros procesos de remediación ambiental, así mismo se expone el uso de la regresión lineal, regresión no lineal y las funciones de error para un análisis óptimo de los datos.

- **Suma de los errores cuadráticos (ERRSQ)**

La suma de cuadrados es una medida de desviación respecto a la media. Este indicador es calculado como una suma de los cuadrados de las variaciones con respecto a la media. Cabe indicar que la suma total de los cuadrados considera la suma de los cuadrados de los factores, así como la sumatoria de errores o aleatoriedad (Ng et al., 2002). Su expresión es:

$$ERRSQ = \sum_{i=1}^n (Y_{calci} - Y_{exi})^2 \quad (2)$$

- **Función fraccional del error híbrida**

Fue desarrollada por Kapoor y Yang, para mejorar el ajuste de la suma de los errores cuadráticos (SEC) a bajas concentraciones dividiéndolo por el valor medido. Esta función incluye el número de puntos de datos ( $n$ ), menos el número de parámetros ( $p$ ) o ecuación isotérmica como divisor (Kapoor & Yang, 1989).

$$HYBRID = \frac{100}{n-p} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(Y_{exi} - Y_{calci})^2}{Y_{exi}} \right] \quad (3)$$

- **Error relativo promedio (ARE)**

El error relativo promedio (ARE por sus siglas en inglés) fue desarrollado por Marquardt con la finalidad de minimizar la distribución de error fraccional en todo el rango de concentración (Marquardt, 1963). Este estadígrafo está dado por la siguiente expresión:

$$ARE(\%) = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{Y_{calci} - Y_{exi}}{Y_{exi}} \right] \quad (4)$$

- **Desviación estándar porcentual de Marquadt (MPSD)**

La función de error de desviación estándar porcentual de Marquadt (MPSD por sus siglas en inglés) se relaciona con una distribución de error medio geométrica modificada en función de los grados de libertad del sistema (Ng et al., 2003). Está representado por la siguiente expresión:

$$MPSD = \sqrt{\frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(Y_{exi} - Y_{calci})}{Y_{exi}} \right]^2} \quad (5)$$

- **Suma del error absoluto (EABS)**



Este método es similar a la función de la suma de errores cuadráticos (ERRSQ). En este caso, los parámetros isotérmicos se determinan empleando esta función de error que proporciona un mejor ajuste para alta concentración de datos (Kundu & Gupta, 2006). Se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$EABS = \sum_i^n |Y_{exi} - Y_{calci}| \quad (6)$$

- **Raíz media del error cuadrado relativo (RMSE)**

El error cuadrático medio (RMSE) mide la diferencia de error que existe entre dos conjuntos de datos. En otras palabras, compara un valor predicho y un valor experimental. Además, se lo conoce como Raíz de la Desviación Cuadrática Media y es una de las estadísticas más utilizadas en el análisis de error y validación de modelos matemáticos (Chai & Draxler, 2014).

A diferencia del error absoluto medio (MAE), el RMSE tiene aplicación en una amplia variedad de aplicaciones para diversas variables de procesos o metodologías de carácter físico, químico o biológico (Willmott & Matsuura, 2005; Chai & Draxler, 2014). Su fórmula de cálculo es la siguiente:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_i^n (Y_{calci} - Y_{exi})^2}{n}} \quad (7)$$

- **Eficiencia del modelo (ME)**

La evaluación del modelo puede realizarse mediante el estadígrafo de eficiencia del modelo, cuya ecuación se plantea de la siguiente forma:

$$ME = \frac{\sum_i^n (Y_{exi} - \bar{Y}_{ex})^2 - \sum_i^n (Y_{calci} - Y_{exi})^2}{\sum_i^n (Y_{exi} - \bar{Y}_{ex})^2} \quad (8)$$

- **Coefficiente de masa residual (CRM)**

El coeficiente de masa residual (CRM por sus siglas en inglés) evalúa las diferencias entre la sumatoria del rendimiento experimental y la sumatoria del rendimiento calculado mediante el modelo, respecto a la sumatoria del rendimiento experimental. Se define a partir de la siguiente ecuación:

$$CRM = \frac{\sum_i^n Y_{exi} - \sum_i^n Y_{calci}}{\sum_i^n Y_{exi}} \quad (9)$$

- **Suma del error residual cuadrado (SRSE)**

Este índice estadístico refleja el cuadrado de la sumatoria del error residual, es decir la diferencia entre el rendimiento calculado y el rendimiento observado en el experimento respecto al rendimiento experimental. Cabe resaltar que mediante este análisis de error residual se determina la dispersión del valor predicho. El estadígrafo en mención tiene la siguiente fórmula:

$$SRSE = \sum_i^n \left( \frac{Y_{calci} - Y_{exi}}{Y_{exi}} \right)^2 \quad (10)$$

• **Coefficiente de determinación (R<sup>2</sup>)**

El coeficiente de determinación, se define como la proporción de la varianza total de la variable explicada por la regresión. El coeficiente de determinación, también llamado R cuadrado, refleja la bondad del ajuste de un modelo a la variable que pretender explicar (Elmorsi, 2011). Por su parte, se debe tomar en cuenta que el resultado del coeficiente de determinación oscila entre 0 y 1. Cuanto más cerca de 1 se sitúe su valor, mayor será el ajuste del modelo a la variable de estudio, mientras que, de forma inversa, cuanto más cerca de cero, menor ajuste tendrá el modelo y, por consiguiente, será menos fiable (Taylor, 1990). También, se caracteriza por representar la varianza respecto a la media. Se determina mediante la siguiente fórmula:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_i^n (Y_{calci} - Y_{exi})^2}{\sum_i^n (Y_{calci} - \bar{Y}_{ex})^2} \quad (11)$$

• **Prueba de ajuste no lineal Chi-Cuadrada (χ<sup>2</sup>)**

Esta función es muy importante en la determinación del mejor ajuste de un modelo aplicado para predecir rendimientos de la digestión anaerobia. Se obtiene evaluando la suma de las diferencias al cuadrado entre los datos experimentales y calculados, con cada diferencia cuadrática dividida por sus valores experimentales correspondientes (Brouers & Al-Musawi, 2015). Se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_{calci} - Y_{exi})^2}{Y_{ex}} \quad (12)$$

Para representar las variables empleadas en los estadígrafos se utilizó una simbología estándar, de modo que están representados de la misma forma. La simbología de cada una de las variables que definen a los estadígrafos se explica a continuación:

$Y_{calci}$ : Y calculado ‘‘i’’

$Y_{exi}$ : Y experimental ‘‘i’’

$i$ : elementos

$n$ : número de datos

$p$ : número de parámetros

## Conclusiones

En este trabajo se han explorado las diversas facetas de los modelos matemáticos aplicados a la digestión anaerobia, un proceso biológico clave con amplias implicaciones en la gestión de residuos y la producción de energía renovable. A través de esta investigación, hemos llegado a varias conclusiones importantes:

Los modelos matemáticos desempeñan un papel crucial en la comprensión y predicción de los procesos asociados con la digestión anaerobia. Desde la caracterización de la cinética de degradación de sustratos hasta



la simulación del comportamiento dinámico de los reactores anaerobios, estos modelos ofrecen una herramienta poderosa para los investigadores y profesionales del campo.

La diversidad de enfoques y técnicas utilizadas en la formulación de modelos matemáticos refleja la complejidad inherente de la digestión anaerobia. Desde modelos cinéticos simples basados en ecuaciones de Monod hasta modelos más complejos que tienen en cuenta la dinámica de la población microbiana y la transferencia de masa y energía, existe una gama de opciones disponibles para adaptarse a diferentes contextos y objetivos de investigación.

Las aplicaciones prácticas de los modelos matemáticos en la digestión anaerobia son numerosas y variadas. Desde la optimización del diseño y la operación de plantas de tratamiento de aguas residuales hasta la evaluación del potencial de producción de biogás a partir de diferentes sustratos, estos modelos ofrecen herramientas valiosas para la toma de decisiones informadas en el ámbito ambiental y energético.

Es importante reconocer las limitaciones y desafíos asociados con el uso de modelos matemáticos en la digestión anaerobia. La validación experimental, la incertidumbre en los parámetros del modelo y la extrapolación a diferentes condiciones operativas son aspectos que requieren una atención cuidadosa y un enfoque multidisciplinario para garantizar la fiabilidad y robustez de los resultados obtenidos.

Los modelos matemáticos representan una herramienta invaluable en el estudio y la aplicación de la digestión anaerobia, ofreciendo una vía prometedora hacia la mejora continua de la eficiencia y la sostenibilidad de este importante proceso biológico.

## Referencias

- Ayawei, N., Ebelegi, A. N., & Wankasi, D. (2017). Modelling and interpretation of adsorption isotherms. *Journal of Chemistry*, 2017. <https://doi.org/10.1155/2017/3039817>
- Brouers, F., & Al-Musawi, T. J. (2015). On the optimal use of isotherm models for the characterization of biosorption of lead onto algae. *Journal of Molecular Liquids*, 212, 46-51. doi: 10.1016/j.molliq.2015.08.054
- Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? - Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific model development*, 7(3), 1247-1250.
- Edeline, F. (1980). *L'epuration biologique des eaux residuales. Théorie et technologie*. Belgium: Cebdic-Liege.
- Edgar, T. F. & Himmelblau, D. M. (1989). *Optimization of Chemical Processes*.
- Elmorsi, T. M. (2011). Equilibrium isotherms and kinetic studies of removal of methylene blue dye by adsorption onto miswak leaves as a natural adsorbent. *Journal of Environmental Protection*, 2(6), 817.
- Gershenfeld, N. (1999). *The nature of mathematical modeling*. Cambridge university press: Cambridge.
- Hanna, O. T., & Sandall, O. C. (1995). *Computerization Methods in Chemical Engineering*. Prentice-Hall International, New Jersey, NH, USA.
- Jeyaseelan, S. (1997). A simple mathematical model for anaerobic digestion process. *Water science and*

*technology*, 35(8), 185-191. doi: 10.1016/S0273-1223(97)00166-2

- Kapoor, A., & Yang, R. T. (1989). Correlation of equilibrium adsorption data of condensable vapours on porous adsorbents. *Gas Separation & Purification*, 3(4), 187-192. doi: 10.1016/0950-4214(89)80004-0
- Kumar, K. V., & Sivanesan, S. (2006). Pseudo second order kinetics and pseudo isotherms for malachite green onto activated carbon: comparison of linear and non-linear regression methods. *Journal of Hazardous Materials*, 136(3), 721-726. doi: 10.1016/j.jhazmat.2006.01.003
- Kundu, S., & Gupta, A. K. (2006). Arsenic adsorption onto iron oxide-coated cement (IOCC): regression analysis of equilibrium data with several isotherm models and their optimization. *Chemical Engineering Journal*, 122(1-2), 93-106. doi: 10.1016/j.cej.2006.06.002
- Kythreotou, N., Florides, G., & Tassou, S. A. (2014). A review of simple to scientific models for anaerobic digestion. *Renewable Energy*, 71, 701-714. doi: 10.1016/j.renene.2014.05.055
- McCarty, P. L., & Mosey, F. E. (1991). Modelling of anaerobic digestion processes (a discussion of concepts). *Water Science and Technology*, 24(8), 17-33. doi: https://doi.org/10.2166/wst.1991.0216
- Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431-441. doi: 10.1137/0111030
- Ng, J. C. Y., Cheung, W. H., & McKay, G. (2002). Equilibrium studies of the sorption of Cu (II) ions onto chitosan. *Journal of Colloid and Interface Science*, 255(1), 64-74. doi: 10.1006/jcis.2002.8664
- Ng, J. C. Y., Cheung, W. H., & McKay, G. (2003). Equilibrium studies for the sorption of lead from effluents using chitosan. *Chemosphere*, 52(6), 1021-1030. doi: 10.1016/S0045-6535(03)00223-6
- Taylor, R. (1990). Interpretation of the correlation coefficient: a basic review. *Journal of diagnostic medical sonography*, 6(1), 35-39. doi: 10.1177/875647939000600106
- Theivarasu, C., & Mysamy, S. (2011). Removal of malachite green from aqueous solution by activated carbon developed from cocoa (*Theobroma Cacao*) shell-A kinetic and equilibrium studies. *Journal of Chemistry*, 8(S1), S363-S371.
- Velázquez-Martí, B., Meneses-Quelal, O. W., Gaibor-Chavez, J., & Niño-Ruiz, Z. (2018). Review of mathematical models for the anaerobic digestion process. In Biogas. *IntechOpen*. doi: http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.80815
- Willmott, C. J., & Matsuura, K. (2005). Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate research*, 30(1), 79-82.