

MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA

Autores:

MSc. Jessica Nataly Castillo Fiallos

MSc. Luigi Orlando Freire Martinez

MSc. Luis Antonio Flores Asimbaya

MSc. Edwin Roberto Chancusig Chicaiza

MSc. Pablo Ernesto Sarzosa Viera



Primera Edición 2023

ISBN: 978-9942-7134-8-3

2023, ALEMA Casa Editora-Editorial Internacional S.A.S.D

Calle Simón Bolívar. A 200 metros del Parque Central de Jipijapa. Jipijapa, Ecuador.

<https://editorialalema.org/libros/index.php/alema>

Diseño y diagramación:

Ing. Wilter Leonel Solórzano Álava, Mg.

Corrección de contenidos:

Dr. C. Omar Mar Cornelio, PhD.

Diseño, montaje y producción editorial:

ALEMA Casa Editora-Editorial Internacional S.A.S.D, Ecuador

Hecho en Ecuador, Made in Ecuador

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos.

Advertencia: “Quedan todos los derechos reservados. Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información existente o por existir, sin el permiso previo por escrito del titular de los derechos correspondientes”.

ISBN: 978-9942-7134-8-3



LIBRO: MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA

El libro Matemática Aplicada a la Ingeniería representa la colaboración de cinco destacados autores que han combinado su experiencia y conocimientos en el campo de las matemáticas y la ingeniería para crear una obra integral y de gran utilidad para estudiantes y profesionales del sector. Cada autor aporta su experticia en áreas específicas, ofreciendo un enfoque completo y práctico que busca facilitar la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos en el ámbito ingenieril.

AUTORES:

Jessica Nataly Castillo Fiallos

Magíster en Matemática. Mención en Modelación y Docencia.
Magíster en Seguridad Telemática.
Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación.
Ingeniera en Electrónica Telecomunicaciones y Redes.
Universidad Técnica de Cotopaxi
jessica.castillo@utc.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-3120-7229>

Luis Antonio Flores Asimbaya

Magíster en Gestión de Energías.
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones
Escuela Politécnica Nacional
luis.flores04@epn.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-0895-3258>

Luigi Orlando Freire Martinez

Magíster en Gestión de Energías.
Magíster en Electrónica y Automatización.
Mención en Redes Industriales.
Ingeniero en Electromecánica
Universidad Técnica de Cotopaxi
luigi.freire@utc.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-7934-9480>

Edwin Roberto Chancusig Chicaiza

Magíster en Planeamiento y Administración Educativos.
Ingeniero en Electromecánica
Instituto Superior Universitario Cotopaxi
edwinchancusigg@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0006-8768-8590>

Pablo Ernesto Sarzosa Viera

Magíster en Diseño Mecánico.
Ingeniero Mecánico.
UEP San José "La Salle" Latacunga
sjle.pablo.sarzosalasalle@edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-5157-9433>

Resumen

Este libro está dirigido a estudiantes y profesionales que quieran profundizar en los conceptos y aplicaciones de las matemáticas, especialmente en el ámbito de la electricidad. El libro consta de cinco capítulos que abordan los siguientes temas: conversión de unidades: se explica cómo convertir entre diferentes sistemas de unidades, como el sistema internacional, el sistema inglés y el sistema sexagesimal, usando factores de conversión y reglas de proporcionalidad. Tipos de ecuaciones: se clasifican las ecuaciones según su grado, su forma y su número de soluciones, y se muestran los métodos más adecuados para resolverlas, como la factorización, la fórmula general, el método de sustitución y el método de eliminación. Tipos de derivadas: se define la derivada de una función como la razón de cambio instantáneo de dicha función, y se presentan las reglas de derivación para funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, así como las derivadas de orden superior y las derivadas implícitas. Tipos de integrales: se introduce el concepto de integral como el área bajo la curva de una función, y se explican los métodos de integración para funciones simples y compuestas, como la integración por partes, por sustitución, por fracciones parciales y por cambio de variable. Aplicación de integrales en la carrera de electricidad: se muestra cómo las integrales pueden utilizarse para resolver problemas relacionados con la electricidad, como el cálculo de la carga, la corriente, el voltaje, la potencia, la energía y la resistencia eléctrica de diferentes circuitos y dispositivos.

Palabras clave: conversión de unidades; derivadas; ecuaciones; electricidad; integrales.

Abstract

This book is aimed at students and professionals who want to deepen their understanding of the concepts and applications of mathematics, especially in the field of electricity. The book consists of five chapters that cover the following topics: unit conversion: it explains how to convert between different systems of units, such as the international system, the English system and the cgs system, using conversion factors and proportionality rules. Types of equations: equations are classified according to their degree, their form and their number of solutions, and the most suitable methods to solve them are shown, such as factorization, the general formula, the substitution method and the elimination method. Types of derivatives: the derivative of a function is defined as the instantaneous rate of change of that function, and the rules of derivation for algebraic, trigonometric, exponential and logarithmic functions are presented, as well as the higher order derivatives and the implicit derivatives. Types of integrals: the concept of integral is introduced as the area under the curve of a function, and the methods of integration for simple and compound functions are explained, such as integration by parts, by substitution, by partial fractions and by change of variable. Application of integrals in the electricity career: it shows how integrals can be used to solve problems related to electricity, such as the calculation of the charge, the current, the voltage, the power, the energy and the electrical resistance of different circuits and devices.

Keywords: derivatives; electricity; equations; integrals; unit conversion

Índice de contenidos

RESUMEN	I
ABSTRACT.....	I
ÍNDICE DE CONTENIDOS	II
PRÓLOGO.....	V
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I.- CONVERSIÓN DE UNIDADES	2
Conversión	2
Unidad.....	2
Ejercicios de conversión de unidades	3
Conversión de unidades de tensión.....	4
Conversión de unidades de la resistencia.....	5
Conversiones aplicadas a electricidad	7
Conversiones aplicadas a electromecánica	10
Conversiones aplicadas a hidráulica	13
Conversiones aplicadas a ingeniería industrial	17
Conversiones aplicadas a sistemas de información	20
Ejercicios planteados de conversiones	23
CAPÍTULO II.- TIPOS DE ECUACIONES	25
Ecuaciones	25
Despeje de ecuaciones algebraicas	25
Forma canónica.....	25
Despeje de ecuaciones del primer grado	25
Ecuación de segundo grado	27
Ecuación de tercer grado	29
Despeje de ecuaciones trigonométricas	31
Despeje de la ecuación exponencial	34
Despeje de ecuaciones logarítmicas	36
Despeje de ecuaciones fraccionarias	39
Despeje de ecuaciones polinómicas	41
Despeje de ecuaciones cartesianas	42
Despeje de ecuación de la Recta.....	44
Ejercicios Planteados	45
CAPÍTULO III. TIPOS DE DERIVADAS	47
Derivadas	47
Tipos de derivada	47
Derivada de una función.....	48
Derivada de una constante	49
Derivada de la potencia	49
Derivada de una raíz	50
Derivada de una suma o diferencia.....	52

Derivada de un producto.....	52
Derivada por la regla de la cadena.....	54
Derivada logarítmica	57
Derivadas trigonométricas	58
Derivada implícita	61
Aplicación de derivadas	64
Ejercicios planteados	75
CAPÍTULO IV.- TIPOS DE INTEGRALES	77
Integrales.....	77
Tipos de integrales	77
Integrales indefinidas	77
Integral definida	78
Integrales inmediatas	79
Integrales racionales.....	80
Integrales por partes	81
Integrales por cambio de variables	83
Integrales exponenciales	84
Integrales algebraicas.....	84
Ejercicios propuestos	96
CAPÍTULO V.- APLICACIÓN DE INTEGRALES EN LA CARRERA DE ELÉCTRICA	97
Principales aplicaciones	97
REFERENCIAS.....	120

Índice de tablas

Tabla 1 Conversión de unidades de masa	2
Tabla 2 Conversión de unidades de tiempo	2
Tabla 3 Conversión de unidades de volumen	2
Tabla 4 Conversión de unidades de longitud.....	3

Prólogo

Las matemáticas son el lenguaje universal de la ciencia y la tecnología. Nos permiten describir, analizar y resolver problemas de diversa índole, desde los más simples hasta los más complejos. Sin embargo, para muchos estudiantes, las matemáticas son una asignatura difícil y aburrida, que requiere de mucha memorización y cálculo.

Este libro pretende cambiar esa percepción y mostrar que las matemáticas son una herramienta poderosa y fascinante, que se puede aplicar a situaciones reales y cotidianas. Para ello, se enfoca en cuatro temas fundamentales: la conversión de unidades, el despeje de ecuaciones, las derivadas y las integrales. Estos temas son esenciales para comprender y manejar conceptos como la velocidad, la aceleración, la fuerza, el trabajo, la energía, el voltaje, la corriente y la resistencia eléctrica.

El libro está dirigido a estudiantes de secundaria, bachillerato y Educación Superior que quieran reforzar sus conocimientos de matemáticas y electricidad, así como a profesores que busquen una forma didáctica y práctica de enseñar estos temas. El libro está dividido en cinco capítulos, cada uno con una introducción teórica, ejemplos resueltos, ejercicios propuestos y soluciones. Además, al final del libro se incluye un apéndice con las fórmulas más importantes y una bibliografía para ampliar la información.

Esperamos que este libro sea de su agrado y que le ayude a mejorar su aprendizaje y su rendimiento académico. Le invitamos a leerlo con atención, a resolver los ejercicios con esmero y a aplicar lo que aprenda en su vida diaria.

Los autores

Introducción

La conversión de unidades es el proceso de cambiar una cantidad expresada en una unidad de medida a otra equivalente. Por ejemplo, podemos convertir metros a centímetros, kilogramos a gramos o segundos a minutos. La conversión de unidades es muy importante para poder comparar magnitudes de diferente naturaleza o escala, así como para realizar operaciones aritméticas entre ellas.

El despeje de ecuaciones es el proceso de aislar una variable en una igualdad que contiene varias variables. Por ejemplo, podemos despejar x en la ecuación $2x + 3y = 5$ o despejar t en la ecuación $v = d/t$. El despeje de ecuaciones es muy útil para encontrar el valor de una variable en función de otras o para expresar una relación entre ellas (Barajas Arenas et al., 2018; Casado et al., 2019).

Las derivadas son el concepto central del cálculo diferencial. Una derivada es la razón de cambio instantánea de una función con respecto a una variable. Por ejemplo, la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$, que indica cómo varía el valor de $f(x)$ cuando x cambia una cantidad infinitesimal. Las derivadas se pueden utilizar para estudiar el comportamiento de las funciones, como su crecimiento, su decrecimiento, sus máximos, sus mínimos o sus puntos de inflexión (Corrales & López, 2018; Deleg & Fajardo, 2023).

Las integrales son el concepto central del cálculo integral. Una integral es el área bajo la curva de una función en un intervalo dado. Por ejemplo, la integral de la función $f(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ es $F(2) - F(0) = 8/3 - 0 = 8/3$, que representa el área sombreada en la figura. Las integrales se pueden utilizar para calcular áreas, volúmenes, longitudes, masas o cargas eléctricas (Falsetti et al., 2021; Fernández & Franco, 2021).

En este libro aprenderás los conceptos básicos y las técnicas más comunes para realizar conversiones de unidades, despejes de ecuaciones, derivadas e integrales. Además, verás cómo se aplican estos temas a problemas relacionados con la electricidad, como el cálculo del voltaje, la corriente o la resistencia en circuitos eléctricos.

Capítulo I.- Conversión de unidades

Conversión

La conversión es un proceso de cambio de una cantidad o medida de una unidad a otra unidad equivalente. Las conversiones son comunes cuando se trabaja con diferentes sistemas de unidades o cuando necesitas expresar una cantidad en términos más prácticos o comprensibles (Geogebra, 2017).

Unidad

Unidad es una cantidad utilizada como referencia o estándar para medir otras cantidades. Las unidades son esenciales para medir y comparar cantidades en diferentes contextos. Se utilizan para cuantificar cantidades físicas como longitud, masa, tiempo, volumen y muchas otras cantidades (Harrieta, 2016).

Tabla 1: Conversión de unidades de masa

	1 kilogramo (kg)	1 unidad atómica de masa (u)	1 slug	1 onza (oz)	1 libra(lb)	1 Ton
1 kilogramo	1	$6.022 * 10^{26}$	$6.852 * 10^{-2}$	35.27	2.205	$1.102 * 10^{-3}$
1 unidad atómica de masa	$1.661 * 10^{-27}$	1	$1.138 * 10^{-28}$	$5.857 * 10^{-67}$	$3.661 * 10^{-27}$	$1.830 * 10^{-30}$
1 slug	14.59	$8.788 * 10^{27}$	1	514.8	32.17	$1.609 * 10^{-2}$
1 onza	$2.835 * 10^{-2}$	$1.707 * 10^{25}$	$1.943 * 10^{-3}$	1	$6.250 * 10^{-2}$	$3.125 * 10^{-5}$
1 libra	0.4536	$2.732 * 10^{26}$	$3.108 * 10^{-2}$	16	1	0.0005
1 Ton	$9.072 * 10^2$	$5.463 * 10^{29}$	62.16	$3.200 * 10^4$	2000	1

Tabla 2: Conversión de unidades de tiempo

	1 segundo (s)	1 minuto (min)	1 hora (h)	1 día (d)	1 año (a)
1 segundo	1	$1.667 * 10^2$	$2.778 * 10^{-4}$	$1.157 * 10^{-5}$	$3.169 * 10^{-8}$
1 minuto	60	1	$1.667 * 10^{-2}$	$6.994 * 10^{-4}$	$1.902 * 10^{-6}$
1 hora	3600	60	1	$4.167 * 10^{-2}$	$1.141 * 10^{-4}$
1 día	$8.640 * 10^4$	1440	24	1	$2.738 * 10^{-3}$
1 año	$3.156 * 10^7$	$5.260 * 10^5$	$8.760 * 10^3$	365	1

Tabla 3: Conversión de unidades de volumen

	1 cm ³	1 l	1 m ³ (SI)	1 pulgada ³	1 pie ³	1 galón
1 cm ³	1	$1.0 * 10^{-3}$	$1.0 * 10^{-6}$	$6.1024 * 10^{-2}$	$3.5315 * 10^{-5}$	$2.6417 * 10^{-4}$
1 l	1000	1	$1.0 * 10^{-3}$	61.024	$3.5315 * 10^{-2}$	0.26417
1 m ³ (SI)	$1.0 * 10^6$	1000	1	$61.023 * 10^{-3}$	35.315	264.17
1 pulgada ³	16.387	$1.6387 * 10^{-2}$	$1.6387 * 10^{-5}$	1	$5.7870 * 10^{-4}$	$4.3290 * 10^{-3}$
1 pie ³	28317	28.317	$2.8317 * 10^{-2}$	1728	1	7.4805
1 galón	3785.4	3.7854	$3.7854 * 10^{-3}$	231	0.13368	1

Tabla 4: Conversión de unidades de longitud

	1 metro (m)	1 pulgada (")	1 Pie	1 milla (mi)
1 metro (m)	1	39.37	3.281	$6.214 * 10^{-5}$
1 pulgada (")	$2.54 * 10^{-2}$	1	$8.333 * 10^{-2}$	$1.578 * 10^{-5}$
1 pie	0.3048	12	1	$1.894 * 10^{-4}$
1 fermi	$1 * 10^{15}$	$3.937 * 10^{-46}$	$3.281 * 10^{-15}$	$6.214 * 10^{-19}$
1 radio de Bohr	$5.292 * 10^{-11}$	$2.083 * 10^{-9}$	$1.736 * 10^{-10}$	$3.288 * 10^{-14}$
1 año luz	$9.460 * 10^{15}$	$3.724 * 10^{17}$	$3.104 * 10^{16}$	$5.878 * 10^{12}$
1 parsec	$3.0091 * 10^{16}$	$1.214 * 10^{18}$	$1.012 * 10^{17}$	$1.916 * 10^{13}$
1 angstrom	$1 * 10^{-10}$	$3.937 * 10^{-9}$	$3.281 * 10^{-10}$	$6.214 * 10^{-14}$
1 yarda	0.9144	36	3	$5.682 * 10^{-4}$
1 braza	19.686	775.038	6	0.012
1 milla náutica	1852	72913.4	6076.12	1.151

Ejercicios de conversión de unidades

- a. Convertir 1.45 m a mm

$$1.45 \text{ m} * \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} = 1450 \text{ mm}$$

- b. Convertir 1.05 m a cm

$$1.05 \text{ m} * \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 105 \text{ cm}$$

- c. Convertir 120.45 m a dm

$$120.45 \text{ m} * \frac{10 \text{ dm}}{1 \text{ m}} = 1204.5 \text{ dm}$$

- d. Convertir 1235.45mm a m

$$1235.45 \text{ mm} * \frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} = 1.23545 \text{ m}$$

- e. Convertir 245.23 cm a mm

$$245.23 \text{ cm} * \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} = 2452.3 \text{ mm}$$

f. Convertir 14.2 cm a m

$$14.2 \text{ cm} * \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0.142 \text{ m}$$

g. Convertir 1545 mm a dam

$$1545 \text{ mm} * \frac{1 \text{ dam}}{10000 \text{ mm}} = 0.1545 \text{ dam}$$

h. Convertir 1674 km a m

$$1674 \text{ km} * \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 1674000 \text{ m}$$

i. Convertir 2367mm a km

$$2367 \text{ mm} * \frac{1 \text{ km}}{1000000 \text{ mm}} = 0.002367 \text{ km}$$

j. Convertir 64557 m a hm

$$64557 \text{ m} * \frac{1 \text{ hm}}{100 \text{ m}} = 645.57 \text{ hm}$$

Conversión de unidades de tensión

Si la fuerza electromotriz entre dos puntos se expresa en Voltios cuando la diferencia de potencial supera los mil vatios o cuando solo deseamos expresar una pequeña fracción de Voltios emplearemos otras unidades (Hernández, 2022).

a. Convertir 1450 Voltios a kilovoltios

$$1450 \text{ V} * \frac{1 \text{ kV}}{1000 \text{ V}} = 1.450 \text{ kV}$$

- b. Convertir 754 milivoltios a Voltios.

$$754mV * \frac{1 V}{1000mV} = 0.754 V$$

- c. Convertir 0.5 Megavoltios a kilovoltios.

$$0.5 MV * \frac{1000 kV}{1MV} = 500 kV$$

- d. Convertir 5.483 miliamperios a microamperios

$$5.483 mA * \frac{1000 \mu A}{1 mA} = 5483 \mu A$$

- e. Convertir 500 kiloamperios a Amperios

$$500 kA * \frac{1000 A}{1 kA} = 500000 \mu A$$

- f. Convertir 500 Gigaamperios a Amperios

$$500 GA * \frac{1000000000 A}{1 GA} = 500000000000 A$$

- g. Convertir 0.45 Megavoltios a kilovoltios

$$0.45 MV * \frac{1000 kV}{1 MV} = 450 kV$$

- h. Convertir 55.89 Voltios a milivoltios

$$55.89 V * \frac{1000 mV}{1 V} = 55890 mV$$

- i. Convertir 1000000 milivoltios a kilovoltios

$$1000000 mV * \frac{1 kV}{1000000 mV} = 1 kV$$

- j. Convertir 0.001 Megavoltios a milivoltios

$$0.001 MV * \frac{1000000000 mV}{1 MV} = 1000000 mV$$

Conversión de unidades de la resistencia

La mayoría de las veces usted utilizará valores de resistencia que se pueden expresar en ohmios, pero en ciertas aplicaciones especiales es posible que trabaje con valores pequeños de resistencia y en este caso tendrá que recurrir a los submúltiplos del ohmio que son valores

fraccionales de este. Otras veces tendrá que expresar valores de resistencia superiores al millón de ohmios, como en el caso de los aislantes y recurrirá al Megaohmio que es un múltiplo del ohmio (Herrera et al., 2023).

- a. Convertir 0.5 MΩ a kΩ

$$0.5 \text{ M}\Omega * \frac{1000 \text{ k}\Omega}{1 \text{ M}\Omega} = 500 \text{ k}\Omega$$

- b. Convertir 8.4 kΩ a Ω

$$8.4 \text{ k}\Omega * \frac{1000 \Omega}{1 \text{ k}\Omega} = 8400 \Omega$$

- c. Convertir 0.5 Ω a mΩ

$$0.5 \Omega * \frac{1000 \text{ m}\Omega}{1 \Omega} = 500 \text{ m}\Omega$$

- d. Convertir 2.428 mΩ a MΩ

$$2.428 \text{ m}\Omega * \frac{1 \text{ M}\Omega}{1000000000 \text{ m}\Omega} = 0.000000002428 \text{ M}\Omega$$

- e. Convertir 0.000060 Ω a MΩ

$$0.000060 \Omega * \frac{1 \text{ M}\Omega}{1000000 \Omega} = 0.00000000006 \text{ M}\Omega$$

- f. Convertir 4600.576 mΩ a kΩ

$$4600.576 \text{ m}\Omega * \frac{1 \text{ k}\Omega}{1000000 \text{ m}\Omega} = 0.004600576 \text{ k}\Omega$$

- g. Convertir 34000 kΩ a Ω

$$34000 \text{ k}\Omega * \frac{1000 \Omega}{1 \text{ k}\Omega} = 34000000 \Omega$$

- h. Convertir 0.0001kΩ a Ω

$$0.0001 \text{ k}\Omega * \frac{1000 \Omega}{1 \text{ k}\Omega} = 0.1 \Omega$$

- i. Convertir 0.00100 mΩ a uΩ

$$0.00100 \text{ m}\Omega * \frac{1000 \text{ u}\Omega}{1 \text{ m}\Omega} = 1 \text{ u}\Omega$$

- j. Convertir $8 \mu\Omega$ a $m\Omega$

$$8 \mu\Omega * \frac{1m\Omega}{1000\mu\Omega} = 0.008 m$$

Conversiones aplicadas a electricidad

Aunque el Amperio es la unidad básica para medir la corriente eléctrica, su uso no siempre es práctico. Las corrientes rara vez superan los 1.000 Amperios, pero a menudo se producen corrientes muy pequeñas del orden de una milésima de Amperio: Podemos utilizar satisfactoriamente el Amperio como unidad para corrientes mayores que un Amperio. Sin embargo, no debe considerarse la unidad para corrientes inferiores a un Amperio (Meriam & Kraige, 2019).

- a. Marta tiene su cocina de inducción con 78 Voltios y quiere transformarlos a milivoltios. ¿Cuántos milivoltios tiene Marta en su cocina de inducción?

$$78V * \frac{1000mV}{1V} = 78000mV$$

- b. Juan compró un cargador con 10 Amperios y necesita convertir en miliamperios. ¿Cuántos miliamperios tiene Juan en su cargador?

$$10A * \frac{1000mA}{1A} = 10000mA$$

- c. Una bomba es de 250 kilovatios. se desea saber ¿Cuántos Megavatios es?

$$250kW * \frac{1MW}{1000kW} = 0.25MW$$

- d. Marco tiene un circuito eléctrico con 10 ohmios y necesita transformarlos a kilohmios. ¿Cuántos kilohmios tiene el circuito eléctrico de Marco?

$$10\Omega * \frac{1k\Omega}{1000\Omega} = 0.01k\Omega$$

- e. Mariela compró un sistema de audio con 3.5 microfaradios y desea convertir estos a nanofaradios. ¿Cuántos nanofaradios tiene Mariela?

$$3.5\mu F * \frac{1000nF}{1\mu F} = 3500nF$$

- f. René tiene un vatímetro con 10 Joule y necesita transformarlos a kilojoules. ¿Cuántos kilojoules tendrá?

$$10J * \frac{1kJ}{1000J} = 0.01kJ$$

- g. María tiene un voltímetro para medir la tensión eléctrica. Ella descubrió que tenía 155 milivoltios y desea transformar a voltios. ¿Cuántos Voltios tiene María?

$$155 mV * \frac{1V}{1000 mV} = 0.155V$$

- h. Jorge para montar unos circuitos necesita 14 kiloamperios, los cuales necesita transformar a Amperios. ¿Cuántos Amperios requiere Jorge?

$$14kA * \frac{1000A}{1kA} = 14000A$$

- i. Transformar 5 Megahertz a Hertz.

$$5Mhz * \frac{1000000 Hz}{1 Mhz} = 5000000 Hz$$

- j. Sebastián mide la tensión de los postes de su barrio que tienen 3.4 kilovoltios y necesita transformar en Voltios. ¿Cuántos Voltios tiene Sebastián?

$$3.4kV * \frac{1000V}{1kV} = 3400V$$

- k. Carla tiene 15 GigaJoules y necesita transformar a Megajoule. ¿Cuántas Megajoule tiene Carla?

$$15GJ * \frac{1000MJ}{1GJ} = 15000MJ$$

- l. Joaquín tiene 0.9 Megaohmios y quiere convertirlos a kiloohmios. ¿Cuántos kiloohmios tiene Joaquín?

$$0.9M\Omega * \frac{1000k\Omega}{1M\Omega} = 900k\Omega$$

- m. Rafaela tiene un refrigerador antiguo el cual diferencia 17 miliwatts de los refrigeradores actuales, los cuales quiere convertirlos a Watts. ¿Cuántos Vatios tiene el refrigerador de Rafaela?

$$17mW * \frac{1W}{1000mW} = 0.017W$$

- n. Martín midió la carga eléctrica de un carro y encontró 20 miliamperios y quiere transformar en microamperios. ¿Cuántos microamperios tiene el carro?

$$20mA * \frac{1000\mu A}{1mA} = 20000\mu A$$

- o. Thiago midió la resistencia de un circuito eléctrico y concluyó que este tiene 15 ohmios y quiere transformar en miliohmios. ¿Cuántos miliohmios mide la resistencia del circuito eléctrico de Thiago?

$$15\Omega * \frac{1000m\Omega}{1\Omega} = 15000m\Omega$$

- p. La radio de Alicia emite sus ondas de 12 Gigahertz. pero desea convertir estas a Megahertz. ¿Cuántas Megahertz emite el radio de Alicia?

$$12GHz * \frac{1000MHz}{1GHz} = 12000 MHz$$

- q. El horno de cocción de Talía tiene 11.30 kilojoules. y desea transformar esto a Joules. ¿Cuántos Joules tiene el horno de Talía?

$$11.30kJ * \frac{1000J}{1kJ} = 11300 J$$

- r. Luis compró un capacitor de 25.5 milifaradios, lo vamos a convertir en microfaradios. ¿Cuántos microfaradios tiene el capacitor de Luis?

$$25.5mF * \frac{1000uF}{1mF} = 25500uF$$

- s. Un panel solar tiene 525 Megavatios y queremos transformarlos a kilovatios. ¿Cuántos kilovatios tiene el panel solar?

$$525MW * \frac{1000kW}{1MW} = 525000kW$$

Conversiones aplicadas a electromecánica

La electromecánica es una técnica que se encarga de estudiar y construir artefactos mecánicos, como los motores eléctricos, relés, válvulas a solenoide, interruptores, ventiladores, lavadoras, entre otros. Esta disciplina combina la ingeniería eléctrica con la mecánica y el electromagnetismo. La ingeniería electromecánica es la disciplina académica que aborda esta técnica y ha producido importantes avances en el desarrollo tecnológico en la mayoría de los campos científicos (Montaguano, 2018).

- a. Marlene viaja en su auto a 77 kilómetros por hora y desea saber a cuanto equivale la velocidad en metros por segundo.

$$77 \frac{km}{h} * \frac{1000m}{1km} * \frac{1h}{3600s} = 21.39 \frac{m}{s}$$

- b. Un balón se mueve a $25 \frac{m}{s}$. ¿Cuál es su velocidad en $\frac{km}{h}$?

$$25 \frac{m}{s} * \frac{1km}{1000m} * \frac{3600s}{1h} = 90 \frac{km}{h}$$

- c. Daniela tiene una moto que da 350 Watts de potencia eléctrica y quiere transformar esto en caballos de fuerza. ¿Cuántos caballos de fuerza tiene?

$$350W * \frac{1hp}{745.7W} = 0.469hp$$

- d. Si un motor tiene una potencia de 3 caballos de fuerza. ¿Cuántos Vatios son?

$$3hp * \frac{735.499W}{1hp} = 2237.1W$$

- e. Julián tiene una unidad de medida la cual tiene $16 \frac{N}{m}$ y la necesita conocer en $\frac{lb}{ft}$

$$16 \frac{N}{m} * \frac{0.225lb}{1N} * \frac{1m}{3.28ft} = 1.09635 \frac{lb}{ft}$$

- f. Raquel tiene un objeto de fuerza de 1500 Newtons. ¿Cuántas libras de fuerza son?

$$1500N * \frac{0.225lb}{1N} = 337.214lb$$

- g. Beto mide una resistencia eléctrica y esta le da 2500 microhmios y va a convertirlos a ohmios. ¿Cuántos ohmios tiene en total?

$$2500u\Omega * \frac{1\Omega}{1000000u\Omega} = 0.0025\Omega$$

- h. Un ingeniero revisó un proyecto y su circuito tiene una resistencia de $3.5 k\Omega$. Si lo convierte en ohmios. ¿Cuántos obtendría?

$$3.5k\Omega * \frac{1000\Omega}{1k\Omega} = 3500\Omega$$

- i. Wilmer compró un capacitor electrolítico de 262 microfaradios, pero quiere transformar a Faradios. ¿Cómo quedaría?

$$262\mu F * \frac{1F}{1000000\mu F} = 0.000262F$$

- j. Rosa tiene un condensador con una capacidad de 2 Faradios si esto lo transformamos a microfaradios. ¿Cuánto tendría?

$$2F * \frac{1000000\mu F}{1F} = 2000000\mu F$$

- k. Patricio debe convertir 3200 Amperios a miliamperios. ¿Cómo le quedaría?

$$3200A * \frac{1000mA}{1A} = 3200000mA$$

- l. El circuito de un proyecto tiene una corriente de 652 miliamperios. ¿Cuántos Amperios son?

$$652mA * \frac{1A}{1000mA} = 0.652A$$

- m. Juan está en su clase y la profesora le pide que convierta 3400 Voltios a kilovoltios. ¿Cuántos kilovoltios son en total?

$$3400V * \frac{1kV}{1000V} = 3.4kV$$

- n. Un cable de energía tiene una tensión de 16700 kilovoltios y lo transformamos a Voltios. ¿Cuántos son?

$$16700kV * \frac{1000V}{1kV} = 16700000V$$

- o. Convertir $12.5 \frac{km}{h}$ a $\frac{m}{s}$

$$12.5 \frac{km}{h} * \frac{1h}{3600s} * \frac{1000m}{1km} = 3.47 \frac{m}{s}$$

- p. Si un televisor tiene 502456 milímetros y esto lo convertimos a pulgadas. ¿Cuántas pulgadas tiene el televisor?

$$502456mm * \frac{1 in}{25.4mm} = 19781.7 in$$

- q. Una barra que Susana se encontró en la calle tiene una longitud de 120 pulgadas. ¿Cuánto será en centímetros?

$$120in * \frac{2.54cm}{1in} = 304.8cm$$

- r. Convertir 125 grados Celsius a grados Fahrenheit.

$$^{\circ}F = \frac{9}{5} * ^{\circ}C + 32$$

$$^{\circ}F = \frac{9}{5} * 125 + 32$$

$$^{\circ}F = 257$$

- s. Convertir 78 grados Fahrenheit a grados Kelvin

$$K = \frac{5(^{\circ}F - 32)}{9} + 273$$

$$K = \frac{5(78 - 32)}{9} + 273$$

$$K = 298.5$$

Conversiones aplicadas a hidráulica

La hidráulica es una rama de la física que se dedica al análisis del movimiento y del equilibrio de los fluidos, basándose en sus propiedades específicas. La hidráulica es una tecnología que utiliza un fluido o líquido como medio para transmitir la energía necesaria para mover o hacer funcionar una máquina o un mecanismo. El fluido utilizado puede ser agua o aceite (Ortiz & Alvarado, 2021).

- a. Almeida tiene un tanquero de 156 metros cúbicos los cuales desea convertirlos a pies cúbicos. ¿Cuántos pies cúbicos tiene Almeida?

$$156m^3 * \frac{35.315ft^3}{1m^3} = 5509.14ft^3$$

- b. Danny tiene un motor de agua que produce 12 galones por minuto. ¿A cuántos litros por segundo equivalen?

$$12 \frac{gal}{min} * \frac{3.78541 l}{1gal} * \frac{1min}{60s} = 0.7571 \frac{l}{s}$$

- c. Romeo sabe que la fuerza de newton tiene 13 Pascales. va a transformar en libras por pulgada cuadrada. ¿Cuánto le quedaría?

$$13 Pa = \frac{N}{m^2} * \frac{0.225lbf}{1N} * \frac{1m^2}{1550in^2} = 0.00188 \frac{lbf}{in^2}$$

- d. Elena debe transformar 780 litros sobre segundo a metros cúbicos sobre hora. ¿Cuánto le quedaría la transformación?

$$780 \frac{l}{s} * \frac{1m^3}{1000l} * \frac{3600s}{1h} = 2808 \frac{m^3}{h}$$

- e. Ricardo tiene una tubería de 55 pies de columna de agua y desea transformarlo a bares. ¿Cuánto sería la tubería en bares?

$$55ftAq * \frac{0.02989bar}{1ftAq} = 1.64395bar$$

- f. Milena tiene un objeto que recorre 6 metros cúbicos sobre segundo el cual lo va a convertir a galones sobre minutos. ¿Cuánto recorrería el objeto de milena en galones sobre minuto?

$$6 \frac{m^3}{s} * \frac{264.172gal}{1m^3} * \frac{60 s}{1min} = 95101.92 \frac{gal}{min}$$

- g. Amaranta compra 17 libras de barrilla por pulgada y necesita convertir su peso a kilopascal.

$$17 \frac{lb}{in} * \frac{6.89476kPa}{1 \frac{lb}{in}} = 117.211kPa$$

- h. Ariel tiene una fuente de agua que proporciona 24 galones por minuto y desea saber el equivalente a metros cúbicos sobre hora. ¿Cuántos metros cúbicos sobre hora es?

$$24 \frac{gal}{min} * \frac{1m^3}{264.172gal} * \frac{60min}{1h} = 5.451 \frac{m^3}{h}$$

- i. Jacob presión ejercida de 52 metros de columna de agua y necesita transformar a bares. ¿Cuál es el total de su objeto en bares?

$$52mca * \frac{1bar}{10.2mca} = 5.0908bar$$

- j. Escarlet tiene 243 litros sobre segundo de agua y desea convertir a galón sobre minuto . ¿Cuántos galones sobre minuto tiene Escarlet?

$$243 \frac{l}{s} * \frac{1gal}{3.785l} * \frac{60s}{1m} = 3851.04 \frac{gal}{min}$$

- k. Alexander tiene un caudal de agua de 13 metros cúbicos por hora y necesita convertirla a pies cúbicos por segundo. ¿Cuál es la medida de Alexander en pies cúbicos por segundo?

$$13 \frac{m^3}{h} * \frac{35.3147ft^3}{1m^3} * \frac{1h}{3600s} = 0.127525 \frac{ft^3}{s}$$

- l. Miriam necesita convertir 20 kilopascales a libras por pulgada cuadrada. ¿Cuál sería el resultado de la conversión?

$$20kPa * \frac{0.145038psi}{1kPa} = 2.901psi$$

- m. Kevin tiene un total de 879 galones por minuto de agua y desea convertir esa cantidad a litros por segundo. ¿Cuál sería la conversión?

$$879 \frac{gal}{min} * \frac{1l}{0.264gal} * \frac{1min}{60s} = 55.492 \frac{l}{s}$$

- n. Helen debe transformar 45 metros cúbicos sobre segundo a galones sobre minutos. ¿Cuál sería el total de la transformación?

$$45 \frac{m^3}{s} * \frac{264.172gal}{1m^3} * \frac{60 s}{1min} = 713264.5 \frac{gal}{min}$$

- o. Marco tiene 540 pies de columna de agua lo cual necesita transformarlo a bares. ¿Cuánto le quedaría el resultado en bares?

$$540ftAq * \frac{0.02989bar}{1ftAq} = 16.1406bar$$

- p. Rubí desea conocer cuanta sería la conversión de 5 litros sobre segundos a galones sobre minuto. ¿Cuál es el resultado de la conversión?

$$5 \frac{l}{s} * \frac{0.264172gal}{1l} * \frac{60 s}{1min} = 79.2516 \frac{gal}{min}$$

- q. Emanuel tiene 99 metros cúbicos sobre horas y va a transformar esto a galones sobre minutos ¿Cuánto es en litros sobre segundos?

$$99 \frac{m^3}{h} * \frac{1000l}{1m^3} * \frac{1h}{3600s} = 435.884 \frac{l}{s}$$

- r. Karol tiene un valor de 65 libras sobre pulgada de jugo para sus amigos. pero desea convertir esta cantidad a pascales. ¿Cuántos pascales equivale el jugo de Karol?

$$65 \frac{lb}{in^2} * \frac{1550in^2}{1m^2} * \frac{4.4482N}{1lb} = 448156.15 \frac{N}{m^2}$$

$$= 448156.15 Pa$$

- s. Ronaldo tiene una medida de 35 metros de columna de agua y necesita transformarlos a bares. ¿A cuántos bares equivale la medida de Ronaldo?

$$35 mca * \frac{1 bar}{10.2 mca} = 3.42bar$$

- t. Berta debe transformar 560 galones por minuto a litros por segundo. ¿Cuánto serían los galones por minuto transformados en litros por segundo?

$$560 \frac{gal}{min} * \frac{3.78541l}{1gal} * \frac{1 min}{60s} = 35.331 \frac{l}{s}$$

Conversiones aplicadas a ingeniería industrial

La Ingeniería Industrial es una disciplina de la ingeniería que se centra en el análisis, diseño, implementación y mejora de sistemas productivos y logísticos. Los graduados en Ingeniería Industrial son altamente solicitados en el mercado laboral (Pabon, 2021).

- a. Stephano necesita medir su casa la cual tiene 15 metros de frente y necesita convertir su medida a pies. ¿Cuántos pies mide la casa de Stephano?

$$15 m * \frac{3.28084 ft}{1m} = 49.2126 ft$$

- b. Anita tiene el peso de sus pollos el cual es 75 kilogramos y necesita transformar a libras. ¿Cuántas libras tiene Anita?

$$75kg * \frac{2.20462lb}{1kg} = 165.3465lb$$

- c. Ramiro tiene un tanquero lleno de leche el cual tiene 800 litros, pero necesita transformar a galones para así poder vender. ¿Cuántos galones de leche tiene Ramiro?

$$800l * \frac{0.264172gal}{1l} = 211.338gal$$

- d. Fredy midió su piscina, la cual tiene 6 metros cúbicos, pero necesita transformar a pies cúbicos ¿Cuántos pies cúbicos tiene la piscina de Fredy?

$$6m^3 * \frac{35.3147ft^3}{1m^3} = 211.8882ft^3$$

- e. Esteban tiene un horno a 400 grados Celsius. pero necesita transformar a grados Fahrenheit. ¿Cuántos grados Fahrenheit?

$$\left(400^{\circ}C * \frac{9}{5}\right) + 32 = 752^{\circ}F$$

- f. Isaac tiene una competencia en la cual debe correr 9.5 metros por segundo ¿Cuántas millas por hora tiene Isaac?

$$9.5 \frac{m}{s} * \frac{1mi}{1609.34m} * \frac{3600s}{1h} = 21.2508 \frac{mi}{h}$$

- g. Josué necesita convertir 20 Pascales a libras por pulgada cuadrada. ¿Cuántas libras por pulgada tiene Josué?

$$20Pa = 20 \frac{N}{m^2} * \frac{1lb}{4.4482N} * \frac{1m^2}{1550in^2} = 0.0029 \frac{lb}{in^2}$$

- h. Isaías tiene un peso de 5 toneladas en su tráiler y necesita saber cuántas libras tiene ¿Cuántas libras tiene el tráiler de Isaías?

$$5ton * \frac{2204.62lb}{1ton} = 11023.1lb$$

- i. Jonathan adquiere un automóvil el cual tiene una potencia de 10000 kilowatts, pero necesita saber cuántos caballos de fuerza son ¿Cuántos caballos de fuerza tiene el automóvil de Jonathan?

$$10000 kW * \frac{1.35962hp}{1kW} = 13410.221hp$$

- j. Victoria debe convertir 180 metros cuadrados a pies cuadrados. ¿Cuántos pies cuadrados tiene Victoria?

$$180m^2 * \frac{10.7639ft^2}{1m^2} = 1937.502ft^2$$

- k. Félix tiene 250 gramos de sal y necesita transformarlo en onzas. ¿Cuántas onzas tiene Félix?

$$250g * \frac{0.035274oz}{1g} = 8.8185oz$$

- l. Estiven tiene un litero de 1000 litros por minuto y necesita conocer. ¿Cuántos galones por minuto entran en él?

$$1000 \frac{l}{min} * \frac{1gal}{3.7854l} = 264.172 \frac{gal}{min}$$

- m. Joselyn va a medir su baño el cual tiene 3 metros cúbicos por segundo y debe transformar a pies cúbicos por segundo. ¿Cuántos pies cúbicos por segundo tiene Joselyn?

$$3 \frac{m^3}{s} * \frac{35.3147 ft^3}{1 m^3} = 105.9441 \frac{ft^3}{s}$$

- n. María viaja a EE.UU y está a una temperatura de 45 grados Fahrenheit, pero necesita saber a cuántos grados Celsius está. ¿Cuántos grados Celsius tiene María?

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}$$

$$C = \frac{5(45 - 32)}{9} = 7.222^\circ C$$

- o. Carapaz tiene una carrera de 500 kilómetros por hora. pero necesita saber a cuantas millas por hora debe ir para finalizar pronto. ¿A cuántas millas por hora debe ir Carapaz?

$$500 \frac{km}{h} * \frac{1 mi}{1.60934 km} = 310.6855 \frac{mi}{h}$$

- p. Francisco necesita convertir 2 mega pascales a libras por pulgada cuadrada. ¿Cuántas libras por pulgada tiene Francisco?

$$2 MPa * \frac{145.038 \frac{lb}{in^2}}{1 MPa} = 290.166 \frac{lb}{in^2}$$

- q. Eusebio necesita vender sus camas las cuales pesan 1000 libras, pero para ello debe transformar a kilogramos. ¿Cuántos kilogramos pesan las camas de Eusebio?

$$1000 lb * \frac{1 kg}{2.20462 lb} = 453.592 kg$$

- r. Jordana compró un carro el cual tiene 500 caballos de fuerza, pero necesita conocer sus kilovatios. ¿Cuántos kilovatios tiene Jordana?

$$500 hp * \frac{0.735499 kW}{1 hp} = 372.5 kW$$

- s. Rigoberto tiene un terreno de 10 hectáreas y necesita transformarlo en acres. ¿Cuántos acres tiene Rigoberto?

$$10 ha * \frac{2.47105 ac}{1 ha} = 24.7105 ac$$

- t. Leonel tiene 2460 metros cúbicos por hora y necesita convertir a pies cúbicos por minuto. ¿Cuántos pies cúbicos por minuto tiene Leonel?

$$2460 \frac{m^3}{h} * \frac{35.3147 ft^3}{1m^3} * \frac{1h}{60min} = 1447.9027 \frac{ft^3}{min}$$

Conversiones aplicadas a sistemas de información

La rama de la ingeniería conocida como Sistemas de Información se enfoca en el estudio sistémico de la información y los complementos de hardware y software que las personas y las organizaciones utilizan para recopilar, filtrar, procesar, crear y distribuir datos (Paredes & Valero, 2018).

- a. Eithan necesita convertir los 5600 megabytes de su internet a gigabytes. ¿Cuántos gigabytes tendría el internet de Eithan?

$$5600MB * \frac{1GB}{1000MB} = 5.6GB$$

- b. Lía revisó y en su unidad de medida marcan 342 kilobytes, los cuales desea convertir a megabytes. ¿Cuántos megabytes tiene su unidad de medida?

$$342kB * \frac{0.001MB}{1kB} = 0.342MB$$

- c. Zahir descubrió que su celular tiene una capacidad en su memoria de 4.2 terabytes y quiere transformar estos a petabytes. ¿Cuánta capacidad tiene según los petabytes encontrados?

$$4.2TB * \frac{1PB}{1000TB} = 0.0042PB$$

- d. Mía tiene un computador con acceso a 10 kilobits y esto lo vamos a cambiar a megabits. ¿Cuántos megabits tiene el computador de Mía?

$$10 kb * \frac{1Mb}{1000 kb} = 0.01Mb$$

- e. El CPU de Gabriel tiene 3 gigabytes de memoria y esto lo va a transformar a bits. ¿Cuántos bits de memoria tiene el CPU de Gabriel?

$$3GB * \frac{1000000000 \text{ bit}}{1GB} = 3000000000 \text{ bit}$$

- f. Jenny necesita cambiar de 14 megabits por segundo a kilobits por segundo. ¿Cuál será la respuesta expresada en kilobits por segundo?

$$14 \frac{Mb}{s} * \frac{1000 kb}{1Mb} = 14000 \frac{kb}{s}$$

- g. Gael se demoró en ir de su cuarto al baño 7890 milisegundos, y estos quiere convertirlos a segundos. ¿Cuál será la respuesta expresada en segundos?

$$7890 ms * \frac{1s}{1000ms} = 7.89s$$

- h. Karina debe transformar 670 mega Hertz a gigahertz. ¿Cuál sería la respuesta?

$$670 MHz * \frac{1GHz}{1000MHz} = 0.67GHz$$

- i. El tamaño de datos de la máquina de Alejo es de 5.5 terabits por segundo y necesita cambiar a gigabits por segundo. ¿Cuánto equivale el tamaño de la máquina expresada en gigabits por segundo?

$$5.5 \frac{Tb}{s} * \frac{1000Gb}{1Tb} = 5500 \frac{Gb}{s}$$

- j. Yolanda necesita convertir 6050 kilobytes por segundo a megabytes por segundo. ¿Cuál es el total?

$$6050 \frac{KB}{s} * \frac{1MB}{1000 KB} = 6.05 \frac{MB}{s}$$

- k. Cambia de 10 megabytes a kilobytes.

$$10MB * \frac{1000 KB}{1MB} = 10000KB$$

- l. Daniel le compró a su hijo una Tablet con 678 bytes y lo va a convertir a kilobits. ¿Cuál es la respuesta expresada en kilobits?

$$678B * \frac{1Kb}{1000B} = 0.678Kb$$

- m. Mi internet corre 3 gigahertz y esto quiero transformar a mega Hertz. ¿Cuántas mega Hertz tiene mi internet?

$$3 GHz * \frac{1000MHz}{1GHz} = 3000MHz$$

- n. Un avión se demora 1234500 milisegundos en despegar, si lo convertimos a minutos. ¿En cuántos minutos despegar el avión?

$$1234500ms * \frac{1m}{60000 ms} = 20.575m$$

- o. Paco necesita transformar 16 terabytes a gigas. ¿Cuántos gigas es la respuesta?

$$16 TB * \frac{1000GB}{1TB} = 16000GB$$

- p. Jaque es ingeniera en Sistemas, encontró que tiene 954 kilobits por segundo en un CPU y esto necesita transformar a megabits por segundo. ¿Cuántos megabits por segundo tiene Jaque?

$$954 \frac{Kb}{s} * \frac{1Mb}{1000 Kb} = 0.954 \frac{Mb}{s}$$

- q. Sercan midió la memoria de su máquina y le dió que tiene 56 petabytes, quiere cambiarlos a terabytes. ¿Cuántos terabytes tiene la máquina de Sercan?

$$56PB * \frac{1000TB}{1PB} = 56000 TB$$

- r. Cambiar 6734 megabytes por segundo a gigabits por segundo.

$$6734 \frac{MB}{s} * \frac{1Gb}{1000MB} = 6.734 \frac{Gb}{s}$$

- s. El computador de Summer tiene una memoria de 7860 bytes los cuales vamos a transformar a kilobytes. ¿Cuántos kilobytes tiene la memoria del computador de Summer?

$$7860 B * \frac{1kB}{1000B} = 7.860kB$$

- t. Tenemos 69 gigabytes y queremos cambiar esto a terabytes. ¿Cuál sería su resultado?

$$69 GB * \frac{1TB}{1000GB} = 0.069TB$$

Ejercicios planteados de conversiones

- María tiene su cocina de inducción con 102 Voltios y quiere transformarlos a milivoltios. ¿Cuántos milivoltios tiene María en su cocina de inducción?
- Juan tiene un circuito eléctrico con 21 ohmios y necesita transformarlos a kiloohmios. ¿Cuántos kiloohmios tiene el circuito eléctrico de Juan?
- Transformar 64 megahertz a Hertz.
- Joa tiene 0.07 megaohmios y quiere convertirlos a ohmios. ¿Cuántos ohmios tiene Joa?
- Rafa tiene una lavadora antigua la cual diferencia 23 milivatios de las lavadoras actuales los cuales quiere convertirlos a vatios. ¿Cuántos vatios es?
- Se tiene 100 gigabytes y se quiere cambiar a terabytes. ¿Cuál sería su resultado?
- La velocidad del bus que viaja Mirle es 77 kilómetros por hora y desea saber a cuánto equivale la velocidad en metros por segundo.
- Un balón se mueve a $18 \frac{m}{s}$. ¿Cuál es su velocidad en $\frac{km}{h}$?
- Si un motor tiene una potencia de 5 caballos de fuerza. ¿Cuántos vatios son?
- Julio tiene una unidad de medida la cual tiene $8 \frac{N}{m}$ y la necesita conocer en $\frac{lbf}{ft}$
- Convertir 102.5 grados Celsius a grados Fahrenheit.
- Convertir 56 grados Fahrenheit a grados Kelvin
- Danny tiene un motor de agua que produce 20 galones por minuto, pero lo va a transformar a litros por segundo. ¿Cuántos litros por segundo equivalen?
- Transformar 18 Pascales a libras por pulgada cuadrada. ¿Cuánto quedaría?
- Ana tiene una fuente de agua que proporciona 54 galones por minuto y desea saber el equivalente a metros cúbicos por hora. ¿Cuántos metros cúbicos por hora es?
- Alex tiene un caudal de agua de 15 metros cúbicos por hora y necesita convertirla a pies cúbicos por segundo. ¿Cuál es la medida de Alexander en pies cúbicos por segundo?

- q. Se requiere convertir 63 kilopascales a libras por pulgada cuadrada. ¿Cuál sería el resultado de la conversión?
- r. Kevin tiene un total de 52.4 galones por minuto de agua y desea convertir esa cantidad a litros por segundo. ¿Cuál sería la conversión?
- s. Helen debe transformar 45.2 metros cúbicos por segundo a galones por minuto. ¿Cuál sería la transformación?
- t. Se obtiene un caudal de 85.4 metros cúbicos por hora y se desea transformar a galones por minuto. ¿Cuál sería la conversión?

Capítulo II.- Tipos de Ecuaciones

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad de dos expresiones en la que los números y las incógnitas parecen estar relacionados mediante operaciones algebraicas; esta es la condición que deben cumplir ciertos números. Por tanto, pueden existir diferentes ecuaciones que representen la misma condición. Una operación algebraica implica dejar una cantidad o una incógnita para uno de los componentes de una igualdad. Es la relación entre las variables independientes y la variable dependiente y sus derivadas con respecto a las variables independientes. Las ecuaciones juegan un papel fundamental tanto en matemáticas como en otras ciencias como la física, la química, la economía, la biología, etc. (Pérez, 2023).

Despeje de ecuaciones algebraicas

En matemática, especialmente en el álgebra superior. Una ecuación algebraica de grado superior es una ecuación de la forma $P(x) = 0$ donde $P(x)$ es un polinomio no nulo ni constante con coeficientes enteros, cuyo grado se supone $n \geq 2$.

Forma canónica

Realizando una misma serie de transformaciones en ambos miembros de una ecuación. puede conseguirse que uno de ellos se reduzca a cero. Si además se ordenan los términos según los exponentes a los que se encuentran elevadas las incógnitas de mayor a menor. se obtiene una expresión denominada forma canónica de la ecuación. Frecuentemente suelen estudiarse las ecuaciones polinómicas a partir de su forma canónica, es decir, aquella cuyo primer miembro es un polinomio y cuyo segundo miembro es cero (Ricardo, 2018).

Despeje de ecuaciones del primer grado

Una ecuación entera de primer grado o ecuación lineal es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia (Studylib.es., 2019).

Ejercicios:

a.

$$5y + 3 = 11 + y$$

$$5y - y = 11 - 3$$

$$4y = 8$$

$$y = \frac{8}{4}$$

$$y = 2$$

b.

$$10x - 5 + 3x - 6 = 10x + 10$$

$$13 - 11 = 10x + 10$$

$$13 - 10x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

c.

$$x + 1 = 10x + 10$$

$$x - 10x = 10 - 1$$

$$-9x = 9$$

$$x = -\frac{9}{9}$$

$$x = -1$$

Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la expresión general: donde x es la variable, y a , b y c constantes; a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal y c es el término independiente (Superprof, 2021).

Fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-2 - 6}{2}$$

$$x_2 = -\frac{8}{2}$$

$$x_2 = -4$$

b.

$$(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -23$$

$$(2x)^2 - 2(2x)(3) + 9 - (x^2 + 2(x) * 5 + 5^2) = -23$$

$$4x^2 - 12x + 9 - x^2 - 10x - 25 + 23 = 0$$

$$3x^2 - 22x + 7 = 0$$

$$a = 3b = -22c = 7$$

$$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4(3)(7)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 84}}{6}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{400}}{6}$$

$$x = \frac{22 \pm 20}{6}$$

$$x_1 = \frac{22 + 20}{6}$$

$$x_1 = \frac{42}{6}$$

$$x_2 = \frac{22 - 20}{6}$$

$$x_2 = \frac{2}{6}$$

c. Ecuación de segundo grado por factorización:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$(x + 4)(x + 2)$$

$$x + 4 = 0 \quad x + 2 = 0$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \quad x^2 + 16x + 8 = 0$$

$$(-4)^2 + 6(-4) + 8 = 0 \quad (-2)^2 + 6(-2) + 8 = 0$$

$$16 - 24 + 8 = 0 \quad 4 - 12 + 8 = 0$$

$$0 = 0 \quad 0 = 0$$

Ecuación de tercer grado

Una ecuación algebraica de tercer grado o ecuación cúbica con una incógnita es una ecuación polinómica de grado tres que se puede poner bajo la forma canónica.

Método de factorización.

Ejercicios:

a.

$$5x^3 - 5x^2 - 10x = 0$$

$$5x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$5x(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$5x = 0 \quad x - 2 = 0 \quad x + 1 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -1$$

b.

$$x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$$

$$x^2(x - 4) - 9(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x^2 - 3^2) = 0$$

$$(x - 4)(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad x + 3 = 0 \quad x - 3 = 0$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 3$$

c.

$$6x^3 - 31x^2 + 10 = 0$$

Método de Ruffini

		-31	3	10
5	6	-30	-5	-10
	6	-1	-2	0

$$\frac{\pm 1 \pm 2 \pm 5 \pm 10}{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6}$$

$$\frac{-2}{+1} = -2 \frac{5}{1} = 5$$

$$(x - 5)(6x^2 - x - 2) = 0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$(3x - 2)(2x + 1) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \quad 2x + 1 = 0$$

$$3x = 2 \quad 2x = -1$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{-1}{2} x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Despeje de ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica es conveniente expresar todos los términos de la ecuación con el mismo arco (ángulo) y después reducirlo a una razón trigonométrica o bien factorizar la ecuación si es posible.

Fundamental:

$$\mathbf{Sen\ a + Cos^2\ a = 1}$$

Ejercicios:

a.

$$3Cos^2x + Sen^2x = 2$$

$$3(1 - Sen^2x) + Sen^2x = 2$$

$$3 - 3Sen^2x + Sen^2x = 2$$

$$-2Sen^2x = -1(-1)$$

$$2Sen^2x = 1$$

$$2Sen^2x = \frac{1}{2}$$

$$Senx = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x = Sen^{-1}\left(\pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$x_1 = Sen^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 45$$

$$x_2 = Sen^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -45$$

b.

$$\tan^2 x + x - 3 = 0$$

$$\frac{x}{x} + \frac{1}{\text{Sen}^2 x} = 3$$

$$\frac{\text{Sen}^4 x + x}{x * \text{Sen}^2 x} = 3$$

$$\text{Sen}^4 x + x = 3 * x * x$$

$$\text{Sen}^4 x + 1 - x = 3(1 - x) \cdot \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Sen}^4 x + 1 - x = 3\text{Sen}^2 x - 3\text{Sen}^4 x$$

$$\text{Sen}^4 x + 1 - x = 3\text{Sen}^2 x - 3\text{Sen}^4 x = 0$$

$$4\text{Sen}^4 x - \text{Sen}^2 x + 1 = 0$$

$$(2\text{Sen}^2 x - 1)^2 = 0$$

$$2\text{Sen}^2 x - 1 = 0$$

$$2\text{Sen}^2 x = 1$$

$$\text{Sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sen} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Sen}x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Sen}x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \left\{ \frac{\pi}{4} * \frac{3\pi}{4} * \frac{5\pi}{4} * \frac{7\pi}{4} \right\}$$

c.

$$4 \text{ Sen} x - \text{Cos} x = 0$$

$$4 \text{ Sen} x = \text{Cos} x$$

$$\frac{4 \text{ Sen} x}{\text{Cos} x} = \frac{\text{Cos} x}{\text{Cos} x}$$

$$4 \text{ Tan} x = 1$$

$$\text{Tan} x = \frac{1}{4}$$

$$x = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x = 14.04^\circ$$

d.

$$4^{\text{Cos}^2 x} = 2^1$$

$$2^{2\text{Cos}^2 x} = 2^1$$

$$2\text{Cos}^2 x = 1$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos^2 x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\cos x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c.s = 45^\circ. 135^\circ. 225^\circ. 315^\circ$$

Despeje de la ecuación exponencial

Es aquella ecuación en la que aparecen exponenciales es decir potencias cuyos exponentes son expresiones en las que aparece la incógnita x .

¿Cómo resolver ecuaciones exponenciales?

Método 1:

Escribir las potencias y los números de la ecuación como potencias con base común (sin aplicar logaritmos).

Método 2:

Aplicación de logaritmos.

Ejercicios:

a.

$$e^{2x+1} = 5$$

$$\ln e^{2x+1} = \ln 5$$

$$2x + 1 = \ln 5$$

$$2x = \ln 5 - 1$$

$$x = \frac{\ln 5 - 1}{2}$$

$$x = 0.304$$

b.

$$7^{3-x} = 5^{x+1}$$

$$\log 7^{3-x} = \log 5^{x+1}$$

$$(3-x) * \log 7 = (x+1) * \log 5$$

$$3\log 7 - x\log 7 = x\log 5 + \log 5$$

$$3\log 7 - \log 5 = x\log 5 + x\log 7$$

$$3\log 7 - \log 5 = * (\log 5 + \log 7)$$

$$\frac{3\log 7 - \log 5}{\log 5 + \log 7} = x$$

$$\frac{343 - \log \log 5}{\log 5 + \log \log 7} = x$$

$$x = \frac{\log \left(\frac{343}{5} \right)}{\log (33)} = 1.189$$

$$\sqrt{81^{x^2+1}} = \frac{9^{x-1} \times 81^x}{724^{-x+2}}$$

$$\sqrt{(9^2)^{x^2+1}} = \frac{9^{x-1} \times (9^2)^x}{(9^3)^{-x+2}}$$

$$\sqrt{9^{2(x^2+1)}} = \frac{9^{x-1+2x}}{9^{-3x+6}}$$

$$9^{\frac{2(x^2+1)}{-2}} = 9^{x*1+2x-(-3x+6)}$$

$$9^{x^2+1} = 9^{x-1+2x+3x-6}$$

$$9^{x^2+1} = 9^{6x-7}$$

$$x^2 + 1 = 6x + 7$$

$$x^2 + 1 - 6x + 7 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 4)(x - 2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 2$$

Despeje de ecuaciones logarítmicas

Es una ecuación cuya incógnita (o incógnitas) se encuentra multiplicando o dividiendo a los logaritmos en sus bases o en el argumento de los logaritmos (dentro de los logaritmos).

Propiedades a usar:

- $\log(A \times B) = \log A + \log B$
- $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$
- $\log A^n = n \times \log A$
- $\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} * \log \log A$
- $a = 1$
- $a = \frac{\log a}{\log c}$

Ejercicios:

a. $(x - 3) - \log_2 5 = (2x + 1)$

$$\left(\frac{x - 3}{5}\right) = \log \log (2x + 1)$$

$$\frac{x - 3}{5} = 2x + 1$$

$$x - 3 = 5(2x + 1)$$

$$x - 3 = 10x + 5$$

$$-9x = 8(-1)$$

$$9x = -8$$

$$x = -\frac{8}{9}$$

b.

$$(2x - 1) - (5x + 2) = (x - 2) - 2$$

$$(2x - 1) - (5x + 2) - (x - 2) = -2$$

$$(2x - 1) - (5x + 2) + (x - 2) = -2$$

$$(2x - 1) - [(5x + 2)(x - 2)] = -2$$

$$(2x - 1) - [5x^2 - 10x + 2x - 4] = -2$$

$$(2x - 1) - (5x^2 - 8x - 4) = -2$$

$$\left(\frac{2x - 1}{5x^2 - 8x - 4}\right) = -2$$

$$3^{-2} = \frac{2x - 1}{5x^2 - 8x - 4}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{2x - 1}{5x^2 - 8x - 4}$$

$$1(5x^2 - 8x - 4) = 9(2x - 1)$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 18x - 9$$

$$5x^2 - 8x - 4 - 18x + 9 = 0$$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4(5)(5)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10}$$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10}$$

$$x = \frac{26 \pm 24}{10}$$

$$x_1 = \frac{26 - 24}{10}$$

$$x_2 = \frac{26 + 24}{10}$$

$$x_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{50}{10} = 5$$

c.

$$x + (x + 9) = 1$$

$$[x(x + 9)] = 1$$

$$x(x + 9) = 10^1$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$(x + 10)(x - 1) = 0$$

$$x + 10 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x_1 = -10 \quad x_2 = 1$$

Despeje de ecuaciones fraccionarias

Una ecuación fraccionaria es una ecuación que contiene fracciones algebraicas para resolver este tipo de ecuaciones tiene sentido eliminar la fracción algebraica transformándola y luego tratarla como si fuera una ecuación normal, resolviendo ecuaciones fraccionarias a menudo nos lleva a una ecuación cuadrática (Superprof, 2021).

Ejercicios:

a.

$$\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{11}{4}$$

$$4 * \frac{3}{4}x + 4 * \frac{5}{2} = 4 * \frac{5}{2}x - 4 * \frac{11}{4}$$

$$3x + 10 = 10x - 11$$

$$3x - 10x = -11 - 10$$

$$-7x = -21$$

$$x = \frac{21}{7}$$

$$x = 3$$

b.

$$\frac{2x - 1}{2x + 1} - \frac{x - 4}{3x - 2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{(2x - 1)(3x - 2) - (x - 4)(2x + 1)}{(2x + 1)(3x - 2)} = \frac{2}{3}$$

$$(2x - 1)(3x - 2) - (x - 4)(2x + 1) = \frac{2}{3}(2x + 1)(3x - 2)$$

$$6x^2 - 4x - 3x + 2 - (2x^2 + x - 8x - 4) = \frac{2}{3}(6x^2 - 4x + 3x - 2)$$

$$6x^2 - 7x + 2 - (2x^2 - 7x - 4) = \frac{2}{3}(6x^2 - x - 2)$$

$$6x^2 - 7x + 2 - 2x^2 + 7x + 4 = \frac{2}{3}(6x^2 - x - 2)$$

$$\left[4x^2 + 6 = \frac{2}{3}(6x^2 - x - 2)\right] 3$$

$$3(4x^2 + 6) = 2(6x^2 - x - 2)$$

$$12x^2 + 18 = 12x^2 - 2x - 4$$

$$12x^2 + 18 = 12x^2 - 2x - 4$$

$$12x^2 - 12x^2 + 2x = -18 + 4$$

$$2x = -14$$

$$x = \frac{-14}{2}$$

$$x = -7$$

c.

$$\frac{3x}{4} - \frac{1}{5} + 2x = \frac{5}{4} - \frac{3x}{20}$$

$$m. c. m = 20$$

$$\frac{20}{4}(3x) - \frac{20}{5}(1) + \frac{20}{1}(2x) = \frac{20}{4}(5) - \frac{20}{10}(3x)$$

$$15x - 4 + 40x = 25 - 3x$$

$$15x + 40x + 3x = 25 + 4$$

$$58x = 29$$

$$x = \frac{29}{58}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Despeje de ecuaciones polinómicas

Son aquellas en las que las expresiones algebraicas intervienen en la ecuación son polinomios (existen otras expresiones algebraicas que no son polinomios tales como las expresiones algebraicas racionales y otras). Se pueden escribir de forma que el primer miembro sea un polinomio y el segundo sea 0 (Superprof, 2021).

Ejercicios:

a. $2(x - 1) + 3x = x + 6$

$$2x - 2 + 3x = x + 6$$

$$2x + 3x - x = 6 + 2$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

b. $(3x - 1)(x - 2) = (x - 2)(x + 2) + 3$

$$3x^2 - 7x + 2 = x^2 - 1$$

$$3x^2 - x^2 - 7x + 2 + 1 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\{a = 2 \quad b = 7 \quad c = 3\}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{15}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

c.

$$2x(x - 3) + 3 = x(x - 2)$$

$$2x^2 - 6x + 3 = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - x^2 - 6x + 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\{a = 1 \quad b = -4 \quad c = 3$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Despeje de ecuaciones cartesianas

Un sistema de coordenadas cartesianas es un sistema de coordenadas que especifica cada punto de forma única en un plano por un par de numéricos o coordenadas que son las distancias desde el punto a dos líneas fijas perpendiculares dirigidas. que se marcan usando la misma unidad de longitud (Superprof, 2021).

Se puede utilizar el mismo principio para especificar la posición de cualquier punto en el espacio de tres dimensiones mediante el uso de tres coordenadas cartesianas que son las distancias con signo a tres planos mutuamente perpendiculares (o equivalentemente mediante su proyección perpendicular sobre tres líneas mutuamente perpendiculares).

Fórmulas para usar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ejercicios:

a. Centro (2.5)

radio. 3

$$1 * (x + h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 2 * x * 2 + 2^2 + y^2 - 2 * y * 5 + 5^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0$$

b.

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 40 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = -40 + 16 + 25$$

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1$$

$$r = \sqrt{1} = 1$$

$$C(4.5)$$

$$r = 1$$

c.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 12$$

$$x_1 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \quad x_2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$\sqrt{r} = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

$$C(2 - 3)$$

$$r = 5$$

Despeje de ecuación de la Recta

La ecuación de la recta es la expresión algebraica que describe todos los puntos de la recta al decir que describe se habla de la posición en el plano cartesiano tanto en el eje X como en el eje Y (Ortiz & Alvarado, 2021).

Ecuación general de la recta: La ecuación general de la recta describe el comportamiento de todas las rectas existentes en el plano cartesiano no importa la recta que se trace siempre va a cumplir con esta ecuación (Ricardo, 2018).

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación de la recta que pasa por un punto: Para determinar la ecuación de la recta que pasa por un punto es necesario conocer la tanto la pendiente (m) como las coordenadas del punto (la abscisa x como la ordenada y).

$$y = mx + n$$

Ejercicios:

1. Conociendo la ecuación de la recta se reemplazan valores. recordemos que la pendiente es 3 y en este caso la coordenada del punto es (1.5).

$$y = mx + n$$

$$5 = (3)(1) + n$$

$$5 = 3 + n$$

$$5 - 3 = n$$

$$2 = n$$

La recta que pasa por el punto (1.5) y tiene una pendiente igual a 3 es: $y = 3x + 2$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

- 2.Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-4.1) y (4.3).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{1 - 3}{(-4) - (4)}$$

$$m = \frac{-2}{-8}$$

$$m = 0.25$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (-4.1) y (4.3) es: $y = 0.25x + 2$ Ecuación de la recta conociendo dos puntos.

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (5.2) y B (3.6)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{6 - 2}{3 - 5}$$

$$m = \frac{4}{-2}$$

$$(y - 2) = -2(x - 5)$$

$$y - 2 = -2x + 10$$

$$y = -2x - 10 + 2$$

$$y = -2x + 12$$

Ejercicios Planteados

- a. $7y + 9 = 11 - 2y$
- b. $x - 3x - 46 = 10x + 10$
- c. $x^2 + x - 8 = 7$
- d. $(7x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -3$
- e. $5x^3 - x^2 - 4x = 0$
- f. $x + \text{Sen}^2 x = 2$
- g. $\text{Tan}^2 x + x - 7 = 0$
- h. $e^{2x+1} = 45$
- i. $\log(AB) = \log A - \log B$
- j. $(2x - 1) - (5x + 2) = (x - 2) - 4$
- k. $\frac{3}{4}x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{11}{7}$
- l. $2(x - 1) + 4x = x - 6$
- m. $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 3^2$
- n. $2x^2 + 2y^2 - 16x - 20y + 80 = 0$
- o. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1.2) y B (3.6)

- p. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (5.3) y B (3.3)
- q. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (6.2) y B (3.6)
- r. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (5.0) y B (0.6)
- s. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (5.2) y B (3.6)

Capítulo III. Tipos de derivadas

Derivadas

La derivada en su concepto más básico es una medida de la tasa de cambio instantánea de una función matemática en un punto dado. En otras palabras la derivada te dice cuánto cambia el valor de la función cuando la variable independiente cambia muy poco en un punto particular de la función.

Las derivadas se utilizan para comprender cómo se comportan las funciones en términos de pendiente o inclinación en diferentes puntos. Puede indicar si una función aumenta o disminuye en un punto, si tiene un máximo o mínimo local y proporciona información valiosa para analizar funciones en matemáticas y otras aplicaciones científicas y de ingeniería en conjunto (Paredes & Valero, 2018).

Es importante considerar que, si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto, lo cual establece que la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad, o sea, si una función no es continua en un punto, entonces no es derivable en él (Rodríguez, 2018).

Tipos de derivada

- Derivada de una función.
- Derivada de una constante.
- Derivada de la potencia.
- Derivada de una raíz.
- Derivada de una suma o diferencia.
- Derivada de un producto.
- Derivada por la regla de la cadena.
- Derivadas logarítmicas.
- Derivadas del seno.
- Derivadas del coseno.
- Derivadas de la tangente.
- Derivadas trigonométricas.
- Derivadas implícitas.

Derivada de una función

Geoméricamente la derivada de una función es la pendiente de la tangente donde se encuentra x . Matemáticamente la derivada de una función se puede expresar de la siguiente manera:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En la fórmula. x es el punto en el que la variable recibe el valor x .

De manera similar, h es cualquier número. Este valor entonces será 0 porque, como vemos en la derivada tenemos que calcular el límite de la función cuando h se aproxima a 0.

Es importante recordar que en general la derivada es una función matemática definida como la tasa de cambio de una variable con respecto a otra.

Es decir en qué porcentaje aumenta o disminuye una variable cuando otra variable también aumenta o disminuye.

Cabe señalar que el límite de una función se define como su tendencia (a qué valor se acerca) a medida que uno de sus parámetros (en este caso h) se acerca a un determinado valor (Pérez, 2023).

Ejercicio:

a.
$$f(x) = 7x - 1$$

$$f(x+h) = 7(x+h) - 1$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{7(x+h) - 1 - (7x - 1)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{7x + 7h - 1 - 7x + 1}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{7h}{h} = 7$$

En este caso no es necesario encontrar el límite cuando h tiende a ser 0. porque el resultado de dividir $f(x+h)-f(x)$ por h da un número natural y no una expresión algebraica que contiene el número h .

Derivada de una constante

En términos matemáticos esta derivada está determinada de la siguiente manera:

$$f(x) = A$$

Si A es una constante pasar a ser: $f'(x) = 0$

Ahora también debemos tener en cuenta que la derivada de una constante multiplicada por una función es igual a esa constante multiplicada por la derivada de la función (Paredes & Valero, 2018).

Es decir se cumplirán la siguiente condición:

$$f(x) = Ay$$

Si y es una función de x y A una constante:

$$f'(x) = Ay'$$

Ejercicio:

- a. Vamos a calcular una derivada que afecta a la función:

$$f(x) = 8(9x + 14)$$

$$y = 9x + 14$$

$$f'(x) = 8 \times y'$$

$$y' = \frac{9(x+h) + 14 - (9x + 14)}{h}$$

$$y' = (9) = 9$$

$$f'(x) = 8 \times y' = 8 \times 9 = 72$$

Derivada de la potencia

La derivada de una potencia es igual al exponente multiplicado por la base de la potencia menos uno.

Es decir, si $f(x) = x^n$, la derivada se calculará de la siguiente manera:

$$f'(x) = nx^{n-1}x'$$

Ejercicio:

a.

$$f(x) = 16x^2$$

$$f'(x) = (16 * 2)x^{2-1} = 32x$$

$$f(x) = 5x^2 - 2x^2 + 7x - 9$$

$$f'(x) = (5 * 2)x^{2-1} - (2 * 2 * (x^{2-1})) + (7 * 1(x^{1-1}))$$

$$f'(x) = 10x - 4x + 7$$

Si hay una constante que no se puede multiplicar por un número desconocido, entonces su derivada con respecto a la **variable no existe**.

Derivada de una raíz

La derivada de un radical, o función irracional, es igual a la derivada del radicando (la expresión bajo el radical) dividida por el producto del índice de la raíz por la misma raíz restándole 1 al exponente del radicando.

$$f(x) = \sqrt[n]{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Si el radicando de la raíz es solamente una x , la fórmula se simplifica. De manera que la derivada de raíz de x es la siguiente:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

En resumen, hay dos fórmulas para derivar una raíz: la primera que se puede usar siempre y la segunda que solo se puede utilizar cuando el radicando es una x .

Si miras, el término del numerador de la fracción es el que resulta de aplicar la regla de la cadena al hacer la derivada de la raíz. Por eso cuando el radicando es x , en el denominador aparece 1 ya que es la derivada de x .

Ejercicios:

a. Derivada de raíz cuadrada:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

En este caso debemos utilizar la segunda fórmula redactada anteriormente.

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

La derivada de una raíz cuadrada es igual a 1 partido por el producto de 2 por la raíz cuadrada de x:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b. Derivada de una raíz cúbica:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

En este segundo ejemplo aplicamos así mismo la segunda fórmula que nos queda así:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

c. Derivada de una raíz a la cuarta:

$$f(x) = \sqrt[4]{7x-2}$$

Ahora no tenemos una x bajo el signo radical, sino que tenemos una expresión algebraica más compleja. Por lo tanto, debemos emplear la fórmula general de la derivada de una raíz.

$$f(x) = \sqrt[n]{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

La expresión bajo el radical es una función de primer grado, por lo que su derivada es 7. Entonces, la derivada de toda la función es:

$$f(x) = \sqrt[4]{7x-2} \rightarrow f'(x) = \frac{7}{4\sqrt[4]{(7x-2)^3}}$$

d. Derivada de una raíz dentro de otra:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 - 5}}$$

Para esta derivada vamos a utilizar la primera fórmula y debemos utilizar la misma fórmula dos veces de manera sucesiva para calcular la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 - 5}}} * (x^2 + \sqrt[3]{x^4 - 5})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 - 5}}} * (2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^4 - 5)^2}} * (x^4 - 5)')$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 - 5}}} * (2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^4 - 5)^2}} * 4x^3)$$

Derivada de una suma o diferencia

La derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de la derivada de cada función por separado.

$$z(x) = f(x) + g(x) \rightarrow z'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una suma también se aplica a la resta, por lo que, si una función tiene un signo negativo delante en lugar de un signo positivo, se debe usar la misma fórmula para resolver la derivada.

$$z(x) = f(x) \pm g(x) \rightarrow z'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejercicios

- a.** Derivada de una suma de funciones de potenciales.

$$f(x) = 3x^2 + 5x$$

La suma de dos funciones es igual a la derivada de cada función por separado. Por lo tanto, primero calculamos la derivada de cada función por separado.

$$\frac{d}{dx} 3x^2 = 6x \qquad \frac{d}{dx} 5x = 5$$

La derivada se conformaría de esta manera.

$$f'(x) = 6x + 5$$

- b.** Derivada de una suma al cuadrado.

$$f(x) = (3x^4 + 7x^2 + 1)^2$$

Es una función compuesta, ya que tenemos una suma de funciones elevada a una potencia. Por ende, tenemos que aplicar la regla de la cadena para derivar toda la función.

$$f(x) = 2(3x^4 + 7x^2 + 1) * (12x^3 + 14x)$$

Derivada de un producto

La derivada de un producto de dos funciones diferentes es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función.

La fórmula de la derivada de la multiplicación entre las dos funciones es la siguiente:

$$z(x) = f(x) * g(x)$$

$$z'(x) \stackrel{\downarrow}{=} f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Como podemos visualizar de un solo producto pasamos a tener dos productos.

Ejercicios

a. Derivada de dos funciones potenciales.

$$f(x) = 5x^2 * (x^3 + 4x - 6)$$

Para resolver esta derivada debemos utilizar la fórmula redactada anteriormente. Pero **lo primero** que debemos hacer es calcular la derivada por separado.

$$\frac{d}{dx} 5x^2 = 10x$$

$$\frac{d}{dx} (x^3 + 4x - 6) = 3x^2 + 4$$

Aplicamos la fórmula de la derivada del producto de dos funciones. Multiplicamos la derivada del primer factor por el segundo factor sin derivar y luego sumamos el producto del primer factor sin derivar por la derivada del segundo factor.

$$f(x) = 5x^2 * (x^3 + 4x - 6)$$



$$f(x) = 5x^5 + 20x^3 - 30x^2$$

Simplificamos la derivada.

$$f'(x) = 5x^5 + 20x^3 - 30x^2$$

$$= 25x^4 + 60x^2 - 60x$$

$$= 25x^4 + 60x^2 - 60x$$

b. Derivada con producto constante.

$$f(x) = 7 * (x^2 + 3x)$$

Resolvemos esta derivada por separado y luego utilizamos la fórmula como la hemos visualizado anteriormente.

$$\frac{d}{dx} 7 = 0 \quad \frac{d}{dx} (x^2 + 3x) = 2x + 3$$

$$f(x) = 7 * (x^2 + 3x)$$

$$f'(x) = 0 * (x^2 + 3x) + 7 * (2x + 3) = 14x + 21$$

En esta derivada podemos ver que tenemos un cero. Ahora pensamos que la derivada de la multiplicación de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Derivada por la regla de la cadena

¿La regla de Cadena?

La regla de la cadena se define como la derivada de una composición de al menos dos tipos diferentes de funciones como:

$$y' = \frac{d}{dx} [f(g(x))]$$

También podemos llamar a la función f la función externa y a la función g la función interna. En esta composición, $f(x)$ y $g(x)$ deben ser dos tipos diferentes de funciones y no pueden evaluarse algebraicamente en un solo tipo de función.

Recuerda que una composición de funciones puede considerarse como una función dentro de otra función o como una función de otra función.

Fórmula de regla en cadena.

La regla de la cadena puede describirse como la multiplicación de la derivada de la función externa f y la derivada de la función interna g . La función interna g se considera el dominio sobre el cual se aplica la derivada de la función externa f . Quedando la fórmula de esta manera (Meriam & Kraige, 2019).

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = \frac{d}{dx} (f(g(x))) * \frac{d}{dx} (g(x))$$

Cuando derivamos $f(g(x))$, utilizamos la regla de la cadena. Primero, aplicamos la derivada a la función externa f , considerando $g(x)$ como el dominio de esta función. Luego multiplicamos el resultado por la derivada de la función interna $g(x)$. Otra forma sería de esta manera.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

- $f(u)$ = la función externa.
- $u = g(x)$. Es el dominio de la función externa $f(u)$.
- $\frac{dy}{dx}$ = la derivada de la función externa $f(u)$ en términos u .
- $\frac{du}{dx}$ = la derivada de la función interna $g(x)$ en términos x .

Ejercicio:

a. Derivada por la regla de cadena.

$$h(x) = \text{Sen}(x^3)$$

Esta función dada se puede ver como una función compuesta. Así, podemos aplicar la fórmula de la regla de la cadena para calcular su derivada.

$$\frac{d}{dx}(h(x)) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) * \frac{d}{dx}(g(x))$$

Escribimos así la derivada como referencia, luego identificamos si es una función externa o interna, en este caso es una función interna $g(x) = u = x^3$

$$f(g(x)) = f(u)$$

$$f(u) = \text{Sin}(u)$$

Resolvemos la derivada con la fórmula de regla en cadena.

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{du}(f(u)) * \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{du}(\text{Sin}(u)) * \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = (\text{Cos}(u)) * (3x^2)$$

Sustituye la función interna con $g(x) = u = x^3$ en la derivada.

$$\frac{d}{dx}h(x) = (\text{Cos}(x^3)) * (3x^2)$$

Simplificamos la derivada.

$$\frac{d}{dx}h(x) = 3x^2 * \text{Cos}(x^3)$$

$$h'(x) = 3x^2 * \text{Cos}(x^3)$$

a.

$$h(x) = (12x + 6)^{24}$$

$$\frac{d}{dx}(h(x)) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) * \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$g(x) = u = 12x + 6$$

$$f(g(x)) = f(u)$$

$$f(u) = u^{24}$$

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{du}(f(u)) * \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{du}(u^{24}) * \frac{d}{dx}(12x + 6)$$

$$\frac{d}{dx}h(x) = (24u^{23}) * (12)$$

$$\frac{d}{dx}h(x) = (24 * ((12x+6)^{23}) * 12)$$

$$\frac{d}{dx}h(x) = 288 * (12x + 6)^{23}$$

$$h'(x) = 288 * (12x + 6)^{23}$$

Derivada logarítmica

Derivada logarítmica natural

La derivada de un logaritmo natural se calcula como el resultado de dividir la derivada del argumento del logaritmo entre la función original del argumento.

$$f(x) = \ln(u) \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Lógicamente, si la función dentro del logaritmo es la función identidad, en el numerador de la derivada queda un 1.

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

El siguiente ejemplo es el que se resuelve la derivada del logaritmo natural de $3x$.

$$f(x) = \ln(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

El logaritmo natural es un logaritmo cuya base es el número e .

$$\ln(x) = (x)$$

Derivada de un logaritmo en base a

La derivada de un logaritmo de cualquier base es 1 dividido por el producto de x y el logaritmo natural de la base del logaritmo original.

$$f(x) = (x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x * \ln(a)}$$

Ejercicio

a. Derivada de la función logarítmica.

$$f(x) = \log(3x^2)$$

$$f'(x) = \frac{6x}{3x^2 * \ln(10)} = \frac{2}{x \ln(10)}$$

b. Derivada logarítmica natural.

$$f(x) = \ln(x^3 + 4x^2)^5$$

$$f'(x) = \frac{5(x^3 + 4x^2)^4 * (3x^2 + 8x)}{(x^3 + 4x^2)^5}$$

$$= \frac{5 * (3x^2 + 8x)}{x^3 + 4x^2}$$

$$= \frac{15x^2 + 40x}{x^3 + 4x^2}$$

$$= \frac{15x + 40}{x^2 + 4x}$$

Derivadas trigonométricas

Derivadas del seno

La derivada de la función seno es la función coseno. Por lo tanto, la derivada del seno de x es igual al coseno de x .

$$f(x) = \text{Sen}(x) \rightarrow f'(x) = \text{Cos}(x)$$

Si la función dentro del argumento del seno es una función, la derivada del seno se calcula como el coseno de esa función multiplicado por la derivada de esa función.

$$f(x) = \text{Sen}(u) \rightarrow f'(x) = \text{Cos}(u) * u'$$

Estas serían las dos fórmulas de la derivada de seno.

Ejercicio.

a. Derivada del seno $2x$.

$$f(x) = \text{Sen}(2x)$$

Cuando la función dentro del argumento del seno es algo distinto de x , debemos aplicar la siguiente fórmula para calcular la derivada del seno.

$$f(x) = \text{Sen}(u) \rightarrow f'(x) = \text{Cos}(u) * u'$$

La derivada de $2x$ es 2, de modo que la derivada del seno de $2x$ es el producto del coseno de $2x$ por 2.

$$f(x) = \text{Sen}(2x)$$

$$f'(x) \text{Cos}(2x) * 2 = 2 * \text{Cos}(2x)$$

b. Derivada del seno de x al cuadrado.

$$f(x) = \text{Sen}(x^2)$$

Utilizamos la segunda fórmula como en el anterior ejercicio y el resultado nos quedará así.

$$f'(x) = \text{Cos}(x^2) * 2x$$

c. Derivada del seno al cubo.

$$f(x) = \text{Sen}^3(x^5 + 4x)$$

$$f(x) = 3\text{Sen}^2(x^5 + 4x) * \text{Cos}(x^5 + 4x) * (5x^4 + 4)$$

Derivada del coseno.

La derivada de la función coseno resulta en la función seno con un cambio de signo. En otras palabras, la derivada del coseno de x es igual al seno de x con signo negativo.

$$f(x) = \text{Cos}(x) \rightarrow f'(x) = -\text{Sen}(x)$$

Si en el argumento del coseno hay una función, la derivada del coseno es el producto de menos el seno de esa función por la derivada de la función.

$$f(x) = \text{Cos}(u) \rightarrow f'(x) = -\text{Sen}(u) * u'$$

La segunda fórmula es equivalente a la primera fórmula, pero aplicando la regla de la cadena.

Ejercicio

Derivada del coseno $2x$.

$$f(x) = \text{Cos}(2x)$$

En el argumento del coseno no tenemos una sola x , sino que tenemos una función más compleja. Por lo tanto, debemos emplear la siguiente fórmula para derivar el coseno.

$$f(x) = \text{Cos}(u) \rightarrow f'(x) = -\text{Sen}(u) * u'$$

Como la derivada de $2x$ es 2 , la derivada del coseno de $2x$ será menos el seno de $2x$ multiplicado por 2 .

$$f'(x) = -\text{Sen}(2x) * 2 = -2 * \text{Sen}(2x)$$

a. Derivada del coseno de x al cuadrado.

$$f(x) = \text{Cos}(x^2)$$

$$f'(x) = -\text{Sen}(x^2) * 2x$$

b. Derivada del coseno al cubo.

$$f(x) = \text{Cos}^3(2x^6 - 5x^3)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\text{Cos}^2(2x^6 - 5x^3) * (-\text{Sen}(2x^6 - 5x^3)) * (12x^5 - 15x^2) \\ &= -3\text{Cos}^2(2x^6 - 5x^3) * \text{Sen}(2x^6 - 5x^3) * (12x^5 - 15x^2) \end{aligned}$$

Derivada de la tangente.

Todas las expresiones son equivalentes, así que la función tangente tiene tres posibles fórmulas para hacer su derivación.

$$f(x) = \text{Tan}(u) \begin{cases} \nearrow f'(x) = \frac{u'}{\text{Cos}^2(u)} \\ \searrow f'(x) = u' * \text{Sec}^2(u) \\ \nearrow f'(x) = (1 + \text{Tan}^2(u)) * u' \end{cases}$$

Ejercicio:

a. Derivada de la tangente 2x

$$f(x) = \text{tan}(2x)$$

Para hacer la derivada de la tangente podemos utilizar las tres fórmulas que hemos redactado anteriormente. En este caso emplearemos la fórmula del coseno.

$$f'(x) = \frac{u'}{\text{cos}^2(u)}$$

La función 2x es lineal por lo que su derivada es 2. De modo que la derivada de la tangente de 2x es 2 partido por el cuadrado del coseno de 2x:

$$f'(x) = \frac{2x}{\text{cos}^2(2x)}$$

b. Derivada de la tangente de x al cuadrado.

$$f(x) = \text{tan}(x^2)$$

La derivada de x al cuadrado es 2x, así que la derivada de la tangente de x^2 es:

$$f'(x) = \frac{2x}{\text{cos}^2(x^2)}$$

c. Derivada de la tangente al cubo.

$$f(x) = \tan^3(9x^2 - 4x)$$

Además la tangente está elevada a la 3, lo que significa que antes de aplicar la fórmula de la derivada de la tangente debemos utilizar la fórmula de la derivada de una potencia:

$$f(x) = \tan^2(9x^2 - 4x) * \frac{18x - 4}{\cos^2(9x^2 - 4x)}$$

$$= \frac{3\tan^2(9x^2 - 4x) * (18x - 4)}{\cos^2(9x^2 - 4x)}$$

Derivada implícita

En la derivación implícita diferenciamos cada lado de la ecuación con dos variables (usualmente x y y) al tratar una de las variables como una función de la otra. Esto llama al uso de la regla de la cadena.

Una función implícita es aquella que la variable dependiente no está despejada.

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Ejercicio:

a. Derivada implícita

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y * \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y * \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Observa que la derivada de y^2 es $2y * \frac{dy}{dx}$, y no simplemente $2y$. Esto es porque tratamos y como una función de x .

- El campo eléctrico generado por una esfera viene dado por $E = F^3 q^{-2}$ calcular su rapidez de cambio.

Cuando $F=5N$ y $q=2nC$

$$E' = (F^3 q^{-2})'$$

$$E' = 3F^2 q^{-2} + \left[(-2q) F^3 \frac{dF}{dq} \right]$$

Despeje $\frac{dF}{dq}$

$$E' = 3F^2 \frac{1}{q^2} - 2qF^3 \frac{dF}{dq}$$

$$\frac{3 * F^2}{q^2} = 2 * q * F^3 \frac{dF}{dq}$$

$$\frac{dF}{dq} = E' = \frac{\frac{3F^1}{q^3}}{\frac{2qF^3}{1}}$$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{3F^2}{2q}$$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{3}{2q F}$$

No obstante: $\frac{dF}{dq} = E = \frac{3}{2q^3 F}$

$$E = \frac{3}{(2)(2 * 10^{-4})(9)} \quad E = 3.75 * 10^3$$

El campo eléctrico calculado bajo las conclusiones dadas del problema corresponde a

$$E = 3.75 * 10^3.$$

- El voltaje o diferencia de potencial eléctrico constante entre 7 cargas y viene dada por

$$V = R^2 * I.$$

Determine la razón del cambio de voltaje cuando $R = 5\Omega$ $I = 2A$.

Derivamos la función que describe la pendiente del potencial eléctrico.

$$V = R^2 * I$$

$$V' = 2R * I + I' * R^2$$

$$V = 2R * I + \frac{d}{dV}(I) * R^2$$

$$2R * I + \frac{d}{dV} * (I) * R^2 = 0 \quad \therefore \quad 2R * I = -\frac{dI}{dV} * R^2.$$

Despejando $\frac{dI}{dV}$:

$$\left(\frac{2RI}{R^2} = -\frac{dI}{dV}\right) * (-1)$$

$$-\frac{2RI}{R^2} = \frac{dI}{dV}$$

$$V' = -\frac{2I}{R}$$

Evalutando en $R = 5\Omega$ $I = 2A$:

$$V = -\frac{2(2)}{5} \quad \Delta V = -\frac{4}{5} \therefore -0.8V$$

El voltaje existente entre 2 cargas según las ecuaciones dadas equivale a 0.8V.

Aplicación de derivadas

Ejercicios:

- En una empresa eléctrica se encuentra una escalera aislante de 25 pies de longitud que está apoyada sobre una pared. Su base se desliza a razón de 2 pies por segundo.

a) ¿A qué ritmo está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7 y 15 pies de la pared?

$$x^2 + y^2 = 25$$

Usando la regla de la cadena y derivando ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$2x * \frac{dx}{dt} + 2y * \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2y * \frac{dy}{dt} = -2x * \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

Cálculo de y para $x = 7 \text{ ft}$:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$y = 24 \text{ ft}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{7 \text{ ft}}{12 \text{ s}}$$

Cálculo de y para $x = 15 \text{ ft}$:

$$x^2 + y^2 = 25 = \sqrt{25^2 - 15^2}$$

$$y = 22 \text{ ft}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} * \frac{dx}{dt} = -\frac{15}{20} * 2$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{15 \text{ ft}}{10 \text{ s}}$$

- La velocidad de un electrón que recorre por el conductor está dada por $v = \frac{100t}{2t+15}$ donde (t) se mide en segundos y (v) en metros por segundos (m/s). Calcule la aceleración del auto a los 10 segundos.

$$a = \frac{(2t + 15)(100) - (100t)(2)}{(2t + 15)^2}$$

$$a = \frac{200t + 1500 - 200t}{(2t + 15)^2}$$

$$a = \frac{1500}{(2t + 15)^2} = \frac{1500}{(2(10) + 15)^2} = \frac{1500}{(20 + 15)^2} = \frac{1500}{(35)^2}$$

$$a = \frac{1500}{1225} = 1.22 \frac{m}{s^2}$$

- La carga eléctrica que pasa a través de la sección transversal del conductor a la vez viene dada por: $Q(t) = t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 3t + 1$ donde (t) se mide en segundos. Cálculo actual a los 5 segundos.

$$Q'(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I = \frac{C}{s}$$

$$I = 4t^3 - 6t^2 + 8t - 3$$

$$I = 4(5)^3 - 6(5)^2 + 8(5) - 3$$

$$I = 4(125) - 6(25) + 8(5) - 3$$

$$I = 500 - 150 + 40 - 3$$

$$I = 387A$$

- La cantidad de carga eléctrica que pasa por una sección transversal de un conductor eléctrico en un tiempo está dada por $Q(t) = t^3 - 4t^2 + 5t + 1$, donde (t) se mide en segundos. Calcule la corriente a los 3 segundos.

$$Q'(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I = \frac{C}{s}$$

$$I = 3t^2 - 8t + 5$$

$$I = 3 * (3)^2 - 8 * (3) + 5$$

$$I = 3 * (9) - 24 + 5$$

$$I = 27 - 19$$

$$I = 8A$$

- El campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas con capacitancia C es:

$$E = \frac{V}{d}$$

$$V = \frac{Q}{C} \quad E = \frac{Q}{Cd} \quad (1)$$

La energía acumulada es:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \rightarrow Q = \sqrt{2uC} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$E = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2U}{C}} \quad (3)$$

La capacitancia de un capacitor de placas paralelas con un dieléctrico de constante K es:

$$C = \frac{K * \epsilon_0 * A}{d}$$

$$E = \sqrt{\frac{2U}{K * \epsilon_0 * Ad}}$$

- La cantidad de carga eléctrica que fluye por un conductor en (t) segundos está dada por

$$Q(t) = \frac{t^3}{3} + t.$$

Donde (Q) se calcula en Coulomb. Calcule la corriente a los 2 segundos.

$$Q'(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I = \frac{C}{s}$$

$$Q(t) = \frac{t^3}{3} + t$$

$$Q(t) = \frac{1}{3} * t^3 + t$$

$$Q'(t) = I = (3) * \left(\frac{1}{3}\right) * t^{3-1} + 1 = \frac{3}{3} * t^2 + 1$$

$$I = t^2 + 1 = (2)^2 + 1$$

$$I = 4 + 1$$

$$I = 5A$$

- Calcule la corriente que fluye a través de un elemento si el flujo de la carga está dado por:

$$q(t) = 10e^{-4t} \text{Cos}50t \mu C$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$u' * v + v' * u$$

$$q'(t) = 10 (-4e^{-4t} \text{Cos}50t + e^{-4t}(\text{Sen}50t)50)$$

$$I(t) = -e^{-4t}(40\text{Cos}50 t + 500 \text{Sen } t)\mu\text{C}$$

- Determine la corriente que fluye a través de un elemento si el flujo de la carga está dado por:

$$q(t) = 20e^{-4t} \text{cos}60t \mu\text{C}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$u' * v + v' * u$$

$$q'(t) = 20 * (-4e^{-4t} \text{Cos}60t + e^{-4t}(\text{Sen}60t)60)$$

$$I(t) = -e^{-4t}(80\text{Cos}60 t + 1200 \text{Sen } t)\mu\text{C}$$

- Cambio de voltaje en un circuito.

El voltaje V en un circuito que satisface la ley $V = I * R$ y cae lentamente cuando la batería se acaba. Al mismo tiempo la resistencia R aumenta cuando el resistor se calienta. Use la ecuación:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dI} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dR} \frac{dR}{dt}$$

Para saber cómo cambia la corriente en el instante en que $R = 600\Omega$ $I=0.04$ amperios:

$$\frac{dR}{dt} = 0.5 * \frac{\Omega}{s} \text{ y } \frac{dv}{dt} = -0.01 \frac{v}{s}$$

Aplicación por la regla de cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dI} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dR} \frac{dR}{dt}$$

$$-0.03 = 600 \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{-0.03}{600} = \frac{dI}{dt}$$

$$-0.0005 \frac{A}{s} = \frac{dI}{dt}$$

- La carga total que entra a una terminal está determinada por $Q = 7t \text{ Sen}(2\pi t) \text{ mC}$.

Calcule la corriente en $t = 0.10\text{s}$

$$I = \frac{Q}{t} \therefore I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I = \frac{d}{dt} [7t \text{ Sen}(2\pi t)] \frac{\text{mC}}{\text{s}}$$

$$I = 7t \frac{d}{dt} [\text{Sen}(2\pi t)] + \text{Sen}(2\pi t) \frac{d}{dt} (7t) \text{ mA}$$

$$I = (7t \text{ Cos}(2\pi t) + 7 \text{ Sen}(2\pi t)) \text{ mA}$$

$$I = (14\pi t \text{ Cos}(2\pi t) + \text{Sen}(2\pi t)) \text{ mA}$$

Sustituimos el valor numérico del tiempo en la ecuación obtenida.

$$I = (14\pi t \text{ Cos}(2\pi t) + 14 \text{ Sen}(2\pi t)) \text{ mA}$$

$$t = 0.10\text{s} = \frac{1}{10} \text{ s}$$

$$I = \left(\frac{14}{10} \pi \cos\left(\frac{2}{10}\pi\right) + 7 \operatorname{Sen}\left(\frac{2}{10}\pi\right) \right) mA$$

$$I = \left(\frac{7}{5} \pi \cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) + 7 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{5}\pi\right) \right) mA$$

$$I = \left(\frac{7}{5} \pi(1) + 7(0) \right) mA \quad \therefore i = mA$$

- La cantidad de carga eléctrica que fluye por un conductor está dada por $Q(t) = \left[\operatorname{Tan}\left(\frac{t^3}{3}\right) \right] + t$ donde Q se calcula en Coulomb. Calcular la corriente a los dos segundos. entonces

$$Q'(t) = \frac{dQ}{dt} = I \frac{c}{s} = A$$

$$\frac{dQ}{dt} = \left[s^2 \left(\frac{t^3}{3} \right) * t^2 \right] + 1$$

No obstante: $I = t^2 s^2 \left(\frac{t^3}{3} \right) + 1$

Evaluamos $Q'(t)$ en $t=2$ segundos es decir en $t=2s$, por lo tanto

$$I = t^2 s^2 \left(\frac{t^3}{3} \right) + 1$$

$$I(2) = 2^2 s^2 \left(\frac{2^3}{3} + 1 \right) \quad \therefore I(2) = 4s^2 \left(\frac{8}{3} \right) + 1$$

$$I(2) = 4 \left[s \left(\frac{8}{3} \right) \right]^2 + 1$$

$$I(2) = 4(1)^2 + 1$$

$$I(2) = [4(1)] + 1 \quad \therefore I(2) = (4) + 1$$

$$I(2) = 4 + 1 \quad \therefore I(2) = 5$$

$$I = 5A$$

Determinar la resistencia eléctrica total de dos resistencias eléctricas dispuestas en serie en un circuito descritas por la función $R = \text{Tan}(R_1^3) + R_2^2$ teniendo en cuenta que

$$R_1 = 80\Omega \quad R_2 = 100\Omega$$

$$R' = [\text{Tan}(R_1^3)] + R_2^2$$

$$R_1 = s^2(R_1^3) * 3R_1^2 + 2R_2$$

$$R_1 = s^2(80\Omega)^3 * 3(80\Omega)^2 + 2(100\Omega)$$

$$R_1 = s^2(512000 \Omega) * 3(6400 \Omega) + 200 \Omega$$

$$R_1 = \{[s(512000 \Omega)]1^2 * 19200\} + 200$$

$$R' = (33.16 * 19200) + 200$$

$$R' = 636.872k\Omega$$

- La carga que ingresa a un cable suministrada por una fuente está determinada por $Q = -7 \text{Cos}(3\pi t^3) \text{mC}$

Calcular la intensidad de corriente en $t=1\text{s}$

$$I = \frac{Q}{t} \therefore Q' = I = -7[-\text{Sen}(3\pi t^3)3\pi 3t^2]$$

$$I = -7[-\text{Sen}(3\pi t^3)9\pi t^2]$$

$$I = 63\pi t^2 \text{Sen}(3\pi t^3)$$

Reemplazamos $t=1$

$$I = 63\pi(1)^2 \text{Sen}(3\pi(1)^3)$$

$$I = 63\pi \text{Sen}(3\pi)$$

$$I = 32.41A$$

La intensidad de corriente que ingresa al cable es 32.41mA

- La carga total que entra en una terminal estos determinados por $Q = 5t \text{Sen}(4\pi t) \text{Cm}$.

Calcular la corriente en $t = 0.5$

Entonces: $I = \frac{Q}{T}; I' = \frac{dQ}{dt}$ donde:

-Q es la carga transformada en columpios.

-I corresponde a la intensidad de corriente dada en amperios.

-t es el tiempo transcurrido dado en un segundo.

$$Q' = I = 5t \cos(4\pi t) * 4\pi + 5\text{Sen}(4\pi t)$$

Por lo tanto $I = [20\pi t \cos(4\pi t) + 5\text{Sen}(4\pi t)]mA$

Sustituimos el valor numérico del tiempo en la ecuación obtenida.

$$I = [20\pi t \cos(4\pi t) + 5\text{Sen}(4\pi t)]mA; \quad t: 0.55 = \frac{1}{2}s$$

$$I = \left[\frac{20}{2} \pi \cos\left(\frac{4}{2}\pi\right) + 5\text{Sen}\left(\frac{4}{2}\pi\right) \right] mA$$

$$I = [10\pi \cos(2\pi) + 5\text{Sen}(2\pi)]mA$$

$$I = [10\pi \cos(1) + 5(0)]mA$$

$$I = 31.42mA$$

R= La corriente total que entra en dicha terminal es igual a 31.42mA.

La carga que ingresa a un cable suministrada por una fuente está determinada por una $Q = -7 \cos(3\pi t^3)mC$. Calcular la intensidad de la corriente en $t = 1s$.

$$I = \frac{Q}{t}; \quad Q = I = -7[-\text{Sen}(3\pi t^3)3\pi 3t^2]mC$$

$$I = -7[-\text{Sen}(3\pi t^3)9\pi t^2]mC$$

$$I = 63\pi t^2 \text{Sen}(3\pi t^3)mC$$

Remplazando $t = 1s$ en la derivada encontrada tenemos.

$$I = 63\pi(1)^2 \text{Sen}(3\pi(1)^3)$$

$$I = 63\pi \text{Sen}(3\pi)$$

$$I = 32.43mA$$

- La carga total que entra a una terminal está determinada por $Q = 7t \text{ Sen}(2\pi t) \text{ mC}$.

Calcule la corriente en $t = 0.10\text{s}$.

$$I = \frac{Q}{t} \therefore I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I = \frac{d}{dt}[7t \text{ Sen}(2\pi t)] \frac{\text{mC}}{\text{s}}$$

$$I = 7t \frac{d}{dt}[\text{Sen}(2\pi t)] + \text{Sen}(2\pi t) \frac{d}{dt}(7t) \text{ mA}$$

$$I = (7t \text{ Cos}(2\pi t) + 7 \text{ Sen}(2\pi t)) \text{ mA}$$

$$I = (14\pi t \text{ Cos}(2\pi t) + \text{Sen}(2\pi t)) \text{ mA}$$

Sustituimos el valor numérico del tiempo en la ecuación obtenida.

$$I = (14\pi t \text{ Cos}(2\pi t) + 7 \text{ Sen}(2\pi t)) \text{ mA}$$

$$t = 0.10\text{s} = \frac{1}{10} \text{ s}$$

$$I = \left(\frac{14}{10} \pi \text{ Cos}\left(\frac{2}{10} \pi\right) + 7 \text{ Sen}\left(\frac{2}{10} \pi\right) \right) \text{ mA}$$

$$I = \left(\frac{7}{5} \pi \text{ Cos}\left(\frac{1}{5} \pi\right) + 7 \text{ Sen}\left(\frac{1}{5} \pi\right) \right) \text{ mA}$$

$$I = \left(\frac{7}{5} \pi (1) + 7(0) \right) \text{ mA} \therefore I = \text{ mA}$$

El campo eléctrico generado por una esfera dado por $E = F^3 q^{-2}$ calcular su rapidez de cambio.

Cuando $F = 5\text{N}$ y $q = 2\text{nC}$

$$E' = (F^3 q^{-2})'$$

$$E' = 3F^2 q^{-2} + \left[(-2q) F^3 \frac{dq}{dq} \right]$$

Despeje $\frac{dF}{dq}$:

$$E' = 3F^2 \frac{1}{q^2} - 2qF^3 \frac{dF}{dq}$$

$$\frac{3F^2}{q^2} = 2qF^3 \frac{dF}{dq}$$

$$\frac{dF}{dq} = E' = \frac{3F^1}{\frac{2qF^3}{1}}$$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{3F^2}{2q}$$

$$\frac{dF}{dq} = \frac{3}{2qF}$$

No obstante: $\frac{dF}{dq} = E = \frac{3}{2q^3F}$

$$E = \frac{3}{(2)(2 * 10^{-4})(9)} \quad E = 3.75 * 10^3$$

El campo eléctrico calculado bajo las conclusiones dadas del problema corresponde a: $E = 3.75 * 10^3$

- El voltaje o diferencia de potencial eléctrico constante entre 7 cargas viene dada por

$$V = R^2 * I$$

Determine la razón de cambio de voltaje cuando $R = 5\Omega$, $I = 2A$.

Derivamos la función que describe el pendiente potencial eléctrico.

$$V = R^2 * I$$

$$V' = 2RI + I'R^2$$

$$V = 2RI + \frac{d}{dV}(I)R^2$$

$$2RI + \frac{d}{dV}(I)R^2 = 0 \quad \therefore \quad 2RI = -\frac{dI}{dV}R^2$$

Despejando $\frac{dI}{dV}$

$$\left(\frac{2RI}{R^2} = -\frac{dI}{dV}\right) * (-1)$$
$$\frac{-2RI}{R^2} = \frac{dI}{dV}$$
$$V' = \frac{-2I}{R}$$

Evaluando en $R = 5\Omega$, $I = 2A$

$$V = \frac{-2(2)}{5} \quad \Delta V = \frac{-4}{5} \therefore -0.8V$$

El voltaje existente entre 2 cargas según las ecuaciones dadas equivale a 0.8V.

Ejercicios planteados

Derive las siguientes funciones:

- $f(x) = -2x^2 - 5$
- $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$
- $f(x) = \frac{x^3+2}{3}$
- $f(x) = \frac{1}{3x^2}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- $f(x) = (5x^2 - 3) * (x^2 + x + 4)$
- $f(x) = \frac{5}{x^5}$
- $f(x) = \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $f'(x) = -\frac{1}{2*x*\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$
- $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$
- $f(x) = \sqrt[4]{x^5 - x^3 - 2}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$
- $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$
- $f(x) = e^{3-x^2}$
- $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- t. $f(x) = 3^{2x^2} * \sqrt{x}$
- u. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$
- v. $f(x) = \ln(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$
- w. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
- x. $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- y. $f(x) = \ln\sqrt{x(1-x)}$
- z. $f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}$
- aa. $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$
- bb. $f(x) = \frac{5x^4-3x^3}{x^5}$
- cc. $f(x) = \sqrt{x^3}$
- dd. $f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^5}$

Capítulo IV.- Tipos de integrales

Integrales

La integración es un concepto fundamental en el cálculo y el análisis matemático. En esencia, una integral es una extensión de la suma, que incluye infinitos sumandos extremadamente pequeños, lo que se puede considerar como una suma continua. Un aspecto clave de la integral es que es la operación inversa a la derivada de una función. Aunque su cálculo puede ser complejo, existen herramientas, como las calculadoras de integrales, que automatizan este proceso (Herrera et al., 2023).

El cálculo integral es una rama de las matemáticas que es esencial para el cálculo de áreas, es especialmente útil en campos como la ciencia y la ingeniería, incluyendo la electricidad. El estudio del cálculo integral implica el análisis de los cambios de variables, los métodos de integración, los diferentes tipos de integrales, como las definidas e indefinidas (Montaguano, 2018).

Tipos de integrales

- Integrales indefinidas.
- Integrales definidas.
- Integrales inmediatas.
- Integrales racionales.
- Integrales por partes.
- Integrales por cambio de variables.
- Integrales exponenciales.
- Integrales algebraicas.

Integrales indefinidas

La integral indefinida es una operación matemática que se utiliza para encontrar la función original a partir de su derivada. Se representa usando el símbolo \int (una "s" alargada). En términos sencillos, la integral indefinida es como deshacer el proceso de derivar una función (Pabon, 2021).

$$\int F(x) \, dx = f(x) + C$$

En la función $F(x) = f(x)$, $F(x)$ es el integrando y es una función de la variable x . Esta función $F(x)$ es en realidad la derivada de otra función, que se llama $f(x)$. A esta función $f(x)$ se le conoce como la integral o la antiderivada.

La constante C , también conocida como constante de integración, es un valor que siempre está presente en el resultado de cualquier integral indefinida (Ortiz & Alvarado, 2021).

Ejercicios:

a.

$$\int (x + 2)^3 dx$$
$$= \frac{1}{4}(x + 2)^4 + C$$

b.

$$\int (x^2 + 1)(x^2 + x + 1) dx$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^2 + C$$

Integral definida

La integral definida es un método matemático que se utiliza para calcular el área encerrada por una curva y las líneas rectas. Este método se aplica a una función $f(x)$ que es no negativa en un intervalo $[a,b]$ en la línea real. La integral definida de esta función desde a hasta b representa el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función, el eje x , y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$. (Corrales & López, 2018)

$$\int_a^b f(x) dx$$

La integral definida cumple las siguientes propiedades:

- Toda integral extendida a un intervalo de un solo punto, $[a,a]$, es igual a cero.
- Cuando la función $f(x)$ es mayor que cero, su integral es positiva; si la función es menor que cero, su integral es negativa.
- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de sus integrales tomadas por separado.

- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función (es decir, se puede «sacar» la constante de la integral).
- Al permutar los límites de una integral, ésta cambia de signo. (Casado et al., 2019)

Ejercicio:

a.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^4 2x(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (x^2 + 9)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\
 &= \frac{1}{3} \left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right] \\
 &= \frac{98}{3}
 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
 & \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_2^3 2x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \left[\sqrt{x^2 - 1} \right]_2^3 \\
 &= \sqrt{8} - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Integrales inmediatas

Las integrales inmediatas o directas son las integrales que no necesitan utilizar ningún método de integración debido a que son muy simples. Por ejemplo, la integral de $2x$ es $x^2 + C$, donde C es la constante de integración. En otras palabras, las integrales inmediatas son aquellas que se pueden calcular rápidamente sin la necesidad de aplicar técnicas más avanzadas de integración (Barajas Arenas et al., 2018).

A veces el integrando es una función multiplicada por su derivada. En este caso, la integral es la propia función:

$$\int F(x) f'(x) dx = f(x) + C$$

Ejercicio:

a.

$$\int x^5 dx$$

$$= \frac{1}{6} * x^6 + C$$

b.

$$\int \frac{2}{3x+2} dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{3x+2} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{1}{3x+2} * 3 dx$$

$$= \frac{2}{3} \ln|3x+2| + C$$

Integrales racionales

Las integrales racionales se refieren a aquellas en las que la función es el cociente de dos polinomios donde P(X) representa el polinomio en el numerador y Q(X) el polinomio en el denominador (Falsetti et al., 2021).

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Si el grado del numerador es igual o mayor que el grado del denominador siempre lo primero que tenemos que hacer es la división de polinomios.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Ejercicio:

a.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2}{x+1} dx \\ &= \int (x+1) dx \\ &= \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln(x+1) + C \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{9+4x^2} dx \\ &= \int \frac{1}{9(1+\frac{4}{9}x^2)} dx \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(\frac{2x}{3})^2} dx \\ &= \frac{1}{9} * \frac{3}{2} \int \frac{\frac{2}{3}}{1+(\frac{2x}{3})^2} dx \\ &= \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Integrales por partes

La integración por partes es una técnica utilizada para calcular integrales de productos. "La integración por partes es un enfoque que se utiliza para encontrar la integral de un producto de funciones".

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

O de manera compacta:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Este método que se puede ver como el reverso de la “regla del producto”. Nos permite considerar uno de los factores en una multiplicación como la derivada de otra función. Este enfoque es útil cuando queremos integrar el producto de dos funciones (Herrera et al., 2023).

Ejercicio:

a.

$$\int x e^x \, dx$$

Para realizar esta integral vamos a utilizar la fórmula compacta:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Ahora solo queda seleccionar cuál de las funciones es v y cual es u . Se hace de la siguiente manera:

- $u = x$
- $du = dx$
- $dv = e^x dx$
- $v = \int e^x dx = e^x$

Y el siguiente paso es resolverla:

$$\begin{aligned} &= xe^x - \int e^x \, dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} &\int x \cos x \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

En esta integral utilizamos la fórmula compacta y la resolvimos de manera directa.

Integrales por cambio de variables

Las integrales por sustitución de variable también son conocidas como: integrales por cambio de variable que implica la introducción de una nueva variable en la ecuación. Este cambio se utiliza para simplificar la integral y facilitar su resolución (Pérez, 2023).

La integración por cambio de variable puede ser vista como la contraparte de la regla de la cadena para la diferenciación:

$$\int f(g(x)) * g'(x) dx = f(g(x))$$

Si es posible integrar por sustitución, generalmente es beneficioso hacerlo en lugar de optar por otro método como la integración por partes. Esto se debe a que el cambio de variable tiende a ser un método más rápido y eficiente que la integración por partes. Sin embargo, la mayoría de las integrales no pueden resolverse indistintamente con ambos métodos, por lo que, es crucial tener un buen entendimiento de ambos (Studylib.es., 2019).

Ejercicio:

a.

$$\begin{aligned} \int (9x + 3)^7 dx \\ &= \frac{1}{7} \int u^7 du \\ &= \frac{1}{72} u^8 + C \\ &= \frac{1}{72} (9x + 3)^8 + C \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \int 2xe^{x^2} dx \\ &= \int 2xe^u \frac{du}{dx} \\ &= \int e^u du \\ &= e^u du \\ &= e^u + C \\ &= e^{x^2} + C \end{aligned}$$

Integrales exponenciales

La función exponencial es posiblemente la más eficaz en términos de cálculos. Esta función $y = e^x$ tiene la particularidad de ser su propia derivada e integral.

Las funciones exponenciales se pueden integrar mediante las siguientes fórmulas:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Ejercicio:

a.

$$\begin{aligned} \int -7e^{x+21} dx \\ &= -7 \int e^u du \\ &= e^u \\ &= -7e^u \\ &= -7e^{x+21} + C \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \int e^{2x+6} dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= e^u \\ &= \frac{e^u}{2} \\ &= \frac{e^{2x+6}}{2} + C \end{aligned}$$

Integrales algebraicas

Las integrales algebraicas son un tipo de integrales que involucran funciones algebraicas. Las funciones algebraicas son aquellas que pueden ser expresadas mediante polinomios, raíces de polinomios, fracciones de polinomios, etc. (Hernández, 2022)

Para resolver integrales algebraicas se utilizan diferentes técnicas y métodos de integración como: la integración por partes, la integración por cambio de variable (sustitución), la integración por fracciones parciales, entre otros.

Por ejemplo, si tienes una integral como:

$$\int x^2 dx$$

Esta sería una integral algebraica porque el integrando es una función algebraica (en este caso un polinomio).

Ejercicio:

a.

$$\begin{aligned} & \int 5^{x^3+1} x^2 dx \\ &= \int \frac{3}{3} 5^{x^3+1} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int 5^{x^3+1} 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{5^{x^3+1}}{\ln 5} + C \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & \int (4x + 1)^2 dx \\ &= \int \frac{4}{4} (4x + 1)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (4x + 1)^2 4dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{(4x + 1)^3}{3} \\ &= \frac{1}{12} (4x + 1)^3 + C \end{aligned}$$

c.

$$\int x \operatorname{sen} x dx$$

$$= x(-\cos x) - \int -\cos x dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Ejercicios resueltos

a.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\ln x}{x^3} dx \\ &= (\ln x) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) - \int -\frac{1}{2x^2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3} dx \\ &= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & \int (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} dx \\ &= (x^3 + 5x^2 - 2) \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) - \int (3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= (x^3 + 5x^2 - 2) \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) - (3x^2 + 10x) \left(\frac{e^{2x}}{4} \right) \\ & \quad + \int (6x + 10) \frac{e^{2x}}{4} dx \\ &= (x^3 + 5x^2 - 2) \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) - (3x^2 + 10x) \left(\frac{e^{2x}}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(6x + 10) \left(\frac{e^{2x}}{8} \right) - \frac{3e^{2x}}{8} \\
& = \left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - \frac{1}{4} \right) \frac{e^{2x}}{2} + C
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
& \int \ln x dx \\
& = x(\ln x) - \int x \frac{dx}{x} \\
& = x(\ln x) - \int dx \\
& = x(\ln x) - x + C
\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
& \int x^9 \ln x dx \\
& = (\ln x) \left(\frac{x^{10}}{10} \right) - \int -\frac{x^{10}}{10} \frac{1}{x} dx \\
& = \frac{x^{10} \ln x}{10} - \frac{1}{10} \int x^9 dx \\
& = \frac{x^{10} \ln x}{10} - \frac{x^{10}}{100} + C
\end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned}
& \int e^x \cos x dx \\
& = e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x e^x dx \\
& = e^x \sin x + e^x \cos x - 2 \int \cos x e^x dx \\
& = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} \\
& = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C
\end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x^2 - 2x + 5}{(x + 3)^3} dx \\ &= \int \frac{3}{x + 3} + \frac{-20}{(x + 3)^2} + \frac{38}{(x + 3)^3} dx \\ &= \int \frac{3}{u} - \frac{20}{u^2} + \frac{38}{u^3} du \\ &= \int \frac{3}{u} du - \int \frac{20}{u^2} du + \int \frac{38}{u^3} du \\ &= 3 \ln u - \left(-\frac{20}{u}\right) + \left(-\frac{38}{2u^2}\right) \\ &= 3 \ln u + \frac{20}{u} - \frac{19}{u^2} \\ &= 3 \ln(x + 3) + \frac{20}{x + 3} - \frac{19}{(x + 3)^2} + C \end{aligned}$$

g.

$$\begin{aligned} & \int x \sqrt{1 + x} dx \\ &= \int (u - 1) \sqrt{u} du \\ &= \int u \sqrt{u} du - \int \sqrt{u} du \\ &= \int u^{\frac{3}{2}} du - \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5} (1 + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1 + x)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

h.

$$\begin{aligned} & \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \int (u^2 - 1) \sqrt{u^2} du \\ &= \int u^4 du - \int u^2 du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{5}(1+x^2)^5 - \frac{1}{3}(1+x^2)^3 + C \end{aligned}$$

i.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} \\ &= \int \frac{u du}{\sqrt{u}} - \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} du - \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

j.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx \\ &= -\ln(\sqrt{1+e^x} + 1) + \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) + C \\ &= \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)^{-1} + \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) + C \\ &= \ln(\sqrt{1+e^x} - 1)(\sqrt{1+e^x} + 1)^{-1} + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{1+e^x} + 1}{\sqrt{1+e^x} - 1} + C \end{aligned}$$

k.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx \\ = & \int \frac{1}{\sqrt{2}\sec u \sqrt{(\sqrt{2}\sec u)^2 - 2}} \sqrt{2}\sec u \tan u du \\ & = \int \frac{\sqrt{2} \sec u \tan u du}{\sqrt{2}\sec u \sqrt{2\sec^2 u - 2}} \\ & = \int \frac{\tan u du}{\sqrt{2\sec^2 u - 2}} \\ & = \int \frac{\tan u du}{\sqrt{2}\sqrt{2\sec^2 u - 1}} \\ & = \int \frac{\tan u du}{\sqrt{2}\sqrt{\tan^2 u}} \\ & = \int \frac{\tan u du}{\sqrt{2} \tan u} \\ & = \int \frac{du}{\sqrt{2}} \\ & = \frac{u}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

l.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt[3]{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}} dx \\ & = \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} + \frac{3}{2} \sqrt[6]{(x+1)^4} \\ & = +2\sqrt[6]{(x+1)^3} + 9\sqrt[6]{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$= +18\sqrt[6]{x+1} + 18\ln\sqrt[6]{x+1} - 1 + C$$

m.

$$\begin{aligned} & \int c \operatorname{sc}^3 x dx \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^3} \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int \frac{(1+u^2)^3}{(2u)^3} \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int \frac{(1+u^2)^2}{4u^3} du \\ &= \int \frac{u^2 + 2u^2 + 1}{4u^3} du \\ &= \int \frac{u}{4} du + \int \frac{1}{2u} du + \int \frac{1}{4u^3} du \\ &= \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \tan^{-2} \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

n.

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{4x} + 3}{e^{3x}} dx \\ &= \int e^x dx + \int \frac{3}{e^{3x}} dx \\ &= e^x - \frac{1}{e^{3x}} + C \end{aligned}$$

o.

$$\begin{aligned} & \int \left(3 + 4x^5 - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx \\ &= 3 \int dx + 4 \int x^5 dx - 8 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= 3x + 4 \frac{x^6}{6} - 8 \ln x + \frac{x^{1+\frac{2}{3}}}{1+\frac{2}{3}} + C \\ &= 3x + 4 \frac{x^6}{6} - 8 \ln x + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C \\ &= 3x + \frac{2}{3} x^6 - 8 \ln x + \frac{3}{5} x^3 \sqrt{x^2} + C \end{aligned}$$

p.

$$\begin{aligned} & \int (6e^x + 4^x) dx \\ &= 6 \int e^x dx + \int 4^x dx \\ &= 6e^x + \frac{4^x}{\ln 4} + C \end{aligned}$$

q.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx \\ &= \int \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5} \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{1}{2\sqrt{5x-1}} 5 dx \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{5x-1} + C \end{aligned}$$

r.

$$\begin{aligned} & \int \frac{7}{\sqrt[5]{(2x-1)^2}} dx \\ &= 7 \int (2x-1)^{-\frac{2}{5}} dx \\ &= 7 \int \frac{2}{2} (2x-1)^{-\frac{2}{5}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7}{2} \int (2x - 1)^{-\frac{2}{5}} 2 dx \\
&= \frac{7(2x - 1)^{\frac{2}{5} + 1}}{2 \left(-\frac{2}{5} + 1\right)} + C \\
&= \frac{7(2x - 1)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + C \\
&= \frac{5}{2} \sqrt[5]{(2x - 1)^3} + C
\end{aligned}$$

s.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3}{4 - 5x^4} dx \\
&= \int -\frac{1}{20} \frac{-20x^3}{4 - 5x^4} dx \\
&= -\frac{1}{20} \int \frac{-20x^3}{4 - 5x^4} dx \\
&= -\frac{1}{20} \ln(4 - 5x^4) + C
\end{aligned}$$

t.

$$\begin{aligned}
&\int (4x + 1)^2 dx \\
&= \int \frac{4}{4} (4x + 1)^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \int (4x + 1)^2 4 dx \\
&= \frac{1}{4} \frac{(4x - 1)^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{12} (4x - 1)^3 + C
\end{aligned}$$

u.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
&= \int \frac{2e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \\
&= 2 \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\
&= 2e^{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$

v.

$$\begin{aligned} & \int 5^{x^3+1} x^2 dx \\ &= \int \frac{3}{3} 5^{x^3+1} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int 5^{x^3+1} 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{5^{x^3+1}}{\ln 5} + C \end{aligned}$$

w.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})} \\ &= \int \frac{2}{2} \frac{dx}{2\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})} \\ &= 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3 + \sqrt{x}} dx \\ &= 2 \ln(3 + \sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

x.

$$\begin{aligned} & \int \operatorname{tg} x dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx \\ &= -\ln \cos x + C \end{aligned}$$

y.

$$\begin{aligned} & \int \frac{4^x - 2^x}{3^x} dx \\ &= \int \left(\frac{4^x}{3^x} - \frac{2^x}{3^x} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{4}{3} \right)^x dx - \int \left(\frac{2}{3} \right)^x dx \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3} \right)^x}{\ln \frac{4}{3}} - \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + C \end{aligned}$$

z.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \int \ln x \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C \end{aligned}$$

aa.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx \\ &= \ln(\ln x) + C \end{aligned}$$

bb.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1+x^2}{x^2} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx \\ &= \int x^{-2} dx + \int 1 dx \\ &= \frac{x^{-1}}{-1} + x + C \\ &= \frac{-1}{x} + x + C \end{aligned}$$

cc.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{x^2+1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x - \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

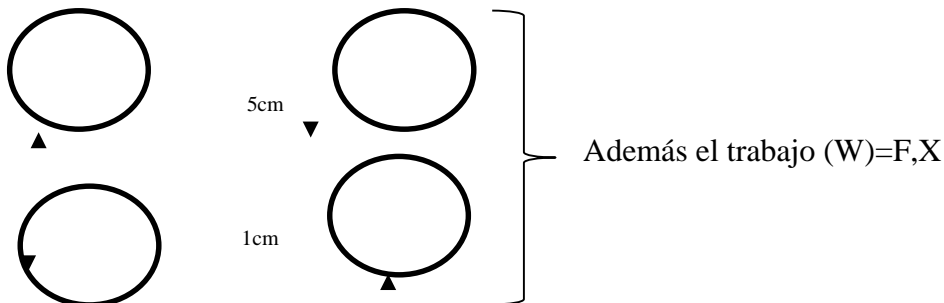
Ejercicios propuestos

- a. $\int (x^3 + 5x^2) e^{2x} dx$
- b. $\int \left(7 - 4x^5 - \frac{8}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$
- c. $\int \frac{9}{\sqrt[5]{(7x-1)^2}} dx$
- d. $\int \ln 7x dx$
- e. $\int 4x^9 \ln x dx$
- f. $\int (7e^x - 7^x) dx$
- g. $\int 7e^x \cos x dx$
- h. $\int \frac{3x^2 - x}{(x)^3} dx$
- i. $\int \sqrt{1+x} dx$
- j. $\int \sqrt{1+x^2} dx$
- k. $\int 9 \frac{7x dx}{\sqrt{1+x}}$

Capítulo V.- Aplicación de integrales en la Carrera de Eléctrica

Principales aplicaciones

- De acuerdo con la ley de Coulomb “dos cargas eléctricas iguales se repelen entre sí con una fuerza F y resulta inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas”. Si la fuerza de repulsión equivale a 10 dn cuando están separados 2 cm calcular el trabajo realizado para llevar las cargas desde una separación de 5cm hasta una separación de 1cm.



$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{x^2}$$

Adicionalmente debemos tener en cuenta que $F = 10 \text{ dn}$ $x = 2 \text{ cm}$

$$(10 \text{ dn}) = \frac{K q_1 q_2}{(2)^2} \quad 10 \text{ dn} = \frac{k q_1 q_2}{4 \text{ cm}^2}$$

$$k q^2 = 40 \quad C = 40$$

$$F = \frac{k q_1 q_2}{x^2} = \frac{C}{x^2} \quad \rightarrow F = \frac{40}{x^2}$$

$$\int dw = \int \frac{40}{x^2} dx$$

$$W = 40 \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$$

$$W = 40 \int_1^5 x^{-2} dx$$

$$W = 40 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^5$$

$$w = 40 \left[\frac{-1}{x} \right]_1^5$$

$$w = 40 \left[-\frac{1}{5} - \left(\frac{-1}{1} \right) \right] \quad w = 40 \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{1} \right)$$

$$w = 40 \left(\frac{-1 + 5}{5} \right) \quad \therefore \quad W = 40 \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$W = 32 \text{ exgios}$$

- Se dispone de una pieza de nicromo (elación 80% níquel y 20% cromo) de resistividad $\delta = 103 \times 10^{-6} \text{ ohm}$

Con forma de paralela total como se muestra el área de bases es $\delta = 2 \text{ cm}^2$ y la longitud $\delta = 5 \text{ cm}$

Sabiendo que la caída de la potencia entre las bases es $V=10\text{v}$

a) Potencia requerida

$$R = \delta \frac{(103 \times 10^{-6}) \times 5}{2} = 2.58 \times 10^{-4}$$

$$\delta = \frac{V^2}{R} = \frac{10^2}{2.53 \times 10^{-4}}$$

$$\delta = 38759690 \text{ w}$$

b) Para determinar la energía absorbida o suministrada en un intervalo de tiempo

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho + dt = \rho \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$T_2 + T_1 = 2h = (2 \times 3600) \text{ s}$$

$$w = \rho t \int_{t_1}^{t_2} \quad w = \rho(t_2 - t_1)$$

$$w = (3.88 \times 10^5)(2 \times 3600) \quad w = 2.79 \times 10^9 \text{ J}$$

$$w = 2.79GJ$$

- Halle la potencia que se entrega a un elemento en $t=3$ ms si la corriente que entra a su terminal positiva es $i=5 \cos 60 \pi t$ A y la tensión es:

a) $v=3i$

b) $v= 3i \, di/dt$

Se encuentra la tensión y la potencia como

$$v = 3 \frac{di}{dt} = 3(-60\pi)5 \operatorname{sen} 60\pi t = -900\pi \operatorname{sen} 60\pi t \text{ V}$$

$$P = vi = -45000\pi \operatorname{sen} 60\pi t \cos 60\pi t \text{ W}$$

En $t = 3$ ms

$$P = -45000\pi \operatorname{sen} 0.18\pi \cos 0.18\pi t \text{ W}$$

$$= -14137.167 \operatorname{sen} 32.4^\circ \cos 32.4^\circ = -6.396 \text{ kW}$$

- Determine la carga total que entra a una terminal entre $t=15$ y $t=25$ si la corriente que pasa por la terminal es

$$i = (3t^2 - t) \text{ A}$$

Solución: Identificamos la ecuación a utilizar para conseguir resolver dicho problema.

Entonces tenemos

$$0 = \frac{Q}{t}; i = \frac{dQ}{dt}$$

Es decir: $dQ = i dt$. Integrado: $dQ = i dt$

$Q = \int i dt \rightarrow$ La ecuación a utilizar sería: $Q = \int i dt$

Dónde: $Q =$ carga transferida; $t_0 =$ tiempo inicial $t_f =$ tiempo final $i =$ intensidad de corriente $dt =$ diferencia de la variable t (donde t es el tiempo dado en segundos)

Luego: procedemos a dar solución al problema tendremos en cuenta el T.F.C (Teorema fundamental del cálculo): $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$

$$\text{Entonces: } Q = \int_1^2 (3t^2 - t) dt \quad Q = [3 \int t^2 dt - \int t dt] \int_1^2$$

$$Q = [3 \left(\frac{t^3}{3}\right) - \left(\frac{t^2}{2}\right)] \int_1^2 \rightarrow Q = \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right) \int_1^2 \quad Q = \left(2^3 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(1^3 - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$Q = \left(8 - \frac{4}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad Q = (8 - 2) - \left(\frac{2 - 1}{2}\right) \rightarrow Q = 6 - \frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{12 - 1}{2} \quad Q = \frac{11}{2} \rightarrow Q = 5.5C$$

R|La carga total que entra en la terminal es 5.5 C

- Determine la carga total que entra a una terminal entre $t = 1$ si $t = 2$ s. si la corriente que pasa por la terminal es $i = (3t^2 - t)$ A.

$$Q = \int_1^2 i dt = \int_1^2 (3t^2 - t) dt$$

$$Q = \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right) \Big|_1^2 = \left(2^3 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(1^3 - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$Q = (8 - 2) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$Q = (6) - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$Q = 5.5C$$

- Calcular la carga total que ha pasado de izquierda a derecha a lo largo del conductor en el intervalo

$$i_1 = \{5e^{4t} \text{ Apara } t < 0$$

$$i_1 = \{5e^{-4t} \text{ Apara } t > 0$$

$$-0.25 \leq t \leq 0.25s$$

$$q = q(t_0) + \int_{t_0}^t i dt \quad q_0 = 0$$

$$q = \int_{-0.25}^{0.25} i dt$$

$$q = \int_{-0.25}^0 5e^{4t} dt + \int_0^{0.25} 5e^{-4t} dt$$

$$q = \left[\frac{5}{4}5e^{4t}\right]_{-0.25}^0 + \left[\frac{5}{4}5e^{-4t}\right]_0^{0.25}$$

$$q = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}e^{-1} - \frac{5}{4}e^{-1} + \frac{5}{4}$$

$$q = \frac{5}{4}(1 - e^{-1}) = 1.580C$$

- Si se tiene una expresión para la corriente puede calcularse la carga transferida entre tiempos t_0 y t que puede expresarse

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = idt$$

$$\int_{q_0}^q dq = \int_{t_0}^t idt$$

$$q - q_0 = \int_{t_0}^t idt. \text{ donde } q_0 = q(t_0)$$

La carga total transferida durante el tiempo es

$$q_0 + \int_{t_0}^t idt$$

- Un cable posee una carga total Q descrita por la ecuación $i = (t^2 - 3t + 2)A$

Calcule el valor de la variable Q entre $t=3s$ y $t=7s$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$Q = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right) \Big|_3^7$$

$$Q = \left(\frac{343}{3} - \frac{3(49)}{2} + 14 \right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{3(9)}{2} + 6 \right)$$

$$Q = \frac{329}{6} - \frac{3}{2} \quad Q = \frac{329 - 9}{6}$$

$Q=53.33 C$ La carga total que se encuentra en la terminal del cable

- Dentro de una residencia se observa un polo eléctrico donde $w(t)$ es el número de voltaje al tiempo medido

En horas cuando inicia el fallo eléctrico $w(0) = 100v$ se determina que el corto circuito está aumentando

A razón de $120t - 3t^2$

$$\int dw(t) = \int (120t - 3t^2) dt$$

$$w(t) = 120 \int t dt - 3 \int t^2 dt$$

$$w(t) = 60t^2 - t^3 + C$$

$$w(t) = 60t^2 - t^3 + 100$$

La pérdida de energía en 1° horas

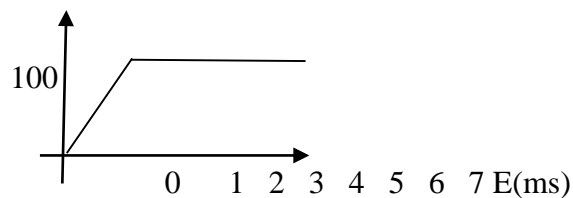
$$w(10) = 60(100) - 1000 + 100$$

$$w(10) = 6000 - 1000 + 100$$

$$w(10) = 5100v$$

$w(10) = 5100v$ energía perdida luego de 10 horas

- Por un contenedor de 1mF inicialmente descargado fluye corriente que se muestra en la figura. Calcular la tensión en el contenedor en los instantes definidos para $t=2ms$.
 $t=5ms$



Solución partiendo de $v(t)$

$$v(t) = \frac{1}{e} \int_{t_0}^t 1 dt + v(t_0)$$

$$v(2ms).c = 1mf. t_0 = 0ms. t = 2ms. v(0) = 0$$

$$v(2ms) = \frac{1}{0.001}$$

$$v(2ms) = 1000 * \left[50 \frac{t^2}{2} \right]$$

$$v(2ms) = 1000[25(0.002)^2 - 25(0)^2]$$

$$v(2ms) = 1000[25t^2]$$

$$v(2ms) = 1000(1 \times 10^{-4})$$

$$v(2ms) = 0.1v$$

$$v(5ms) * c = 1mf * to = 2ms * t = 5ms$$

$$v(5ms) = \frac{1}{0.001} \int_{0.002}^{0.005} 0.1 dt + v(2ms)$$

$$v(5ms) = 1000(0.1)v + 0.1v$$

$$v(5ms) = 100[0.005] - [100(0.002)]$$

$$v(5ms) = 0.5 - 0.2 + 0.1$$

$$v(5ms) = 0.4v$$

- Halle la carga $q(t)$ que fluye a través de un elemento si la corriente es

$$i(t) = 10 \cos(10t + \pi/6) \mu A \quad q(0) = 2 \mu C$$

Aplicando el método de integración por sustitución

$$q(t) = \int 10 \cos(10t + \pi/6) dt$$

$$u = 10t + \pi/6 \quad du = 10dt$$

$$dt = \frac{du}{10}$$

$$q(t) = \int 10 \cos(u) + C$$

$$q(t) = \text{sen}(u) + C$$

$$q(t) = \text{sen}(10t + \pi/6) + C$$

Evalutando $q(t)$ en $t=0$

$$q(0) = \text{sen}(10(0) + \pi/6) + C$$

$$2 = \text{sen}(\pi/6) + C$$

Despejando C tenemos

$$c = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$q(t) = \text{sen}(10t + \pi/6) + \frac{3}{2} \mu C$$

- La corriente que entra a la terminal positiva de un dispositivo es $i(t) = 2e^{-2t}A$ y la tensión a través del dispositivo es $v(t) = \frac{4di}{dt}V$

-Calcule la carga suministrada en el dispositivo $t=0$ y $t=3s$

-Calcule la potencia absorbida

a.

$$q(t) = \int i(t)dt$$

$$q(t) = \int_0^3 2e^{-2t} dt$$

$$u = -2t \quad du = -2dt$$

$$dt = \frac{du}{2}$$

$$q(t) = 2 \int_0^3 e^u \frac{du}{2}$$

$$q(t) = -e^u$$

$$q(t) = -e^u \rightarrow -(e^{-2(3)} - e^{-2(0)})$$

$$q = 0.99C$$

b.

$$v(t) = \frac{4di}{dt}V \quad i(t) = 2e^{-2t}A$$

$$\frac{di}{dt} = -4e^{-2t}$$

$$v(t) = (4)(-4e^{-2t}) = -16e^{-2t}$$

$$p = vi \quad p = (-16e^{-2t})(2e^{-2t})$$

$$p = -32e^{-4t}W$$

- Halle la carga $q(t)$ que fluye a través de un elemento si la corriente es

$$i(t) = 10 \cos(10t + \pi/3) \mu A \quad q(0) = 2 \mu C$$

Aplicando el método de integración por sustitución

$$q(t) = \int 10 \cos(10t + \pi/3) dt$$

$$u = 10t + \pi/3 \quad du = 10dt$$

$$dt = \frac{du}{10}$$

$$q(t) = \int 10 \cos(u) + C$$

$$q(t) = \text{sen}(u) + C$$

$$q(t) = \text{sen}(10t + \pi/3) + C$$

Evaluando $q(t)$ en $t=0$

$$q(0) = \text{sen}(10(0) + \pi/3) + C$$

$$2 = \text{sen}(\pi/3) + C$$

- Un plano que coincide con el plano x y tiene carga distribuida superficialmente. con densidad

$$\sigma(x * y) = - \frac{\alpha}{2\pi [d^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

En que α es una constante positiva

- Determine la carga total contenida en el plano
- Encuentre el campo eléctrico que la distribución anterior produce en un punto de coordenadas $(0,0, d)$

Solución.

- Se dice que determine la carga del plano

$$Q = \int \sigma(x * y) dx dy = - \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{[d^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Para evaluar esta integral usamos coordenadas polares planas entonces

$$Q = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = -\alpha \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Notamos de inmediato que el integral se puede escribir como.

$$-\frac{r}{[r^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dr} \frac{1}{[r^2 + d^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Con esto la integral es inmediata.

$$-\int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{1}{[r^2 + d^2]^{\frac{1}{2}}} \right] = -\frac{1}{d}$$

-Se tiene un elemento con $v = 18[v]e$ $c = 30[mA]h$ obtener la potencia adsorbida por el elemento y la energía absorbida durante un intervalo de 20m\s

Solución:

Potencia absorbida (recibida): $p=v \cdot i = 18 \cdot 30mA$

$$p = (18 * 30)mA * v$$

$$p = 540mw$$

Entonces

$$p = 540mw * \frac{1w}{1000mw} \quad p = \frac{540w}{1000} \quad p = \frac{54}{100}w \quad p = 0.54w$$

Energía absorbida durante el intervalo definido.

$$w = \int_0^t p dt$$

$$w = \int_0^{20 \times 10^{-3}} 0.54 dt = \int_0^{0.02} 0.54 dt = 0.54t|^{0.02}$$

$$w = 0.54 * 0.02 - (0.54 * 0)$$

$$w = (0.0108 - 0)J$$

$$w = 10.8J$$

- La carga total que entra a una terminal está determinada por $Q = 5t \sin(8\pi t)$ mC. Calcule la corriente en $t = 0.5s$.

1: Identificar la ecuación a utilizar para la solución al problema.

$$i = \frac{Q}{t} \therefore i = \frac{dQ}{dt}$$

$$i = \frac{d}{dt}[5t \operatorname{sen}(8\pi t)] \frac{mC}{s}$$

$$i = 5t \frac{d}{dt}[\operatorname{sen}(8\pi t)] + \operatorname{sen}(8\pi t) \frac{d}{dt}(5t) mA$$

$$i = (5t \cos(8\pi t) + 5 \operatorname{sen}(8\pi t)) mA$$

$$i = (40\pi t \cos(8\pi t) + 5 \operatorname{sen}(8\pi t)) mA$$

Sustituimos el valor numérico del tiempo en la ecuación obtenida.

$$i = (40\pi t \cos(8\pi t) + 5 \operatorname{sen}(8\pi t)) mA$$

$$t = 0.5s = \frac{1}{2}s$$

$$i = \left(\frac{40}{2} \pi \cos\left(\frac{8}{2}\pi\right) + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{8}{2}\pi\right) \right) mA$$

$$i = (40\pi \cos(8\pi) + 5 \operatorname{sen}(8\pi)) mA$$

$$i = (20\pi(1) + 5(0)) mA$$

Transformar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia las siguientes funciones

a. Ejercicios Función escalón

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 7, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = 7$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} 7 e^{-st} dt$$

$$= 7 \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
&= 7 \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} 7 \left[-\frac{1}{e^{sw} s} - \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s} \right) \right] \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} 7 \left[-\frac{1}{e^{s(\infty)} s} + \frac{1}{s} \right] \\
&= \frac{7}{s}
\end{aligned}$$

b. Ejercicio

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 5, & t < 2 \\ -1, & 2 < t < 5 \end{cases}$$

$$f(t) = 5$$

$$F(s) = \int_0^\infty 5 e^{-st} dt$$

$$= 5 \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$= 5 \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} 5 \left[-\frac{1}{e^{sw} s} - \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s} \right) \right]$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} 5 \left[-\frac{1}{e^{s(\infty)} s} + \frac{1}{s} \right]$$

$$F(s) = \frac{5}{s}$$

$$f(t) = -1$$

$$F(s) = \int_0^\infty -1 e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e^{sw} s} - \left(\frac{e^{-s(0)}}{s} \right) \right] \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{e^{s(\infty)} s} - \frac{1}{s} \right] \\
\mathbf{F(s)} &= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}
\end{aligned}$$

c. Ejercicio

$$\begin{aligned}
\mathbf{F(s)} &= \int_0^{\infty} \mathbf{f(t)} e^{-st} dt \\
\mathbf{f(t)} &= \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{t < 0} \\ \mathbf{9AB}, & \mathbf{t \geq 0} \end{cases} \\
\mathbf{f(t)} &= \mathbf{9AB} \\
\mathbf{F(s)} &= \int_0^{\infty} \mathbf{9AB} e^{-st} dt \\
&= \mathbf{9AB} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \mathbf{9AB} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} \mathbf{9AB} \left[-\frac{1}{e^{sw} s} - \left(-\frac{e^{-s(0)}}{s} \right) \right] \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} \mathbf{9AB} \left[-\frac{1}{e^{s(\infty)} s} + \frac{1}{s} \right] \\
\mathbf{F(s)} &= \frac{\mathbf{9AB}}{\mathbf{s}}
\end{aligned}$$

d. Ejercicios Función rampa

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t - 3, & t \geq 3 \end{cases} f(t) = t - 3$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} (t - 3) e^{-st} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} (te^{-st} - 3e^{-st}) dt$$

$$= \int_0^{\infty} te^{-st} dt - 3 \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$u = t \quad dv = e^{-st} dt \quad = -\frac{te^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt - 3 \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$du = dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \quad = -\frac{te^{-st}}{s} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt - 3 \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} + \frac{3e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{we^{-sw}}{s} - \frac{e^{-sw}}{s^2} + \frac{3e^{-sw}}{s} \right) - \left(-\frac{(0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s^2} + \frac{3e^{-s(0)}}{s} \right)$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{\infty}{e^{s(\infty)}s} - \frac{1}{e^{s(\infty)}s^2} + \frac{3}{e^{s(\infty)}s} \right) - \left(-\frac{1}{s^2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s}$$

$$F(s) = \frac{1 - 3s}{s^2}$$

e. Ejercicio

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sqrt{2}e^{4t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sqrt{2}e^{4t}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} (\sqrt{2}e^4 t) e^{-st} dt$$

$$F(s) = \sqrt{2}e^4 \int_0^{\infty} (t e^{-st}) dt$$

$$u = t \quad dv = e^{-st} dt \quad = \sqrt{2}e^4 \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt \right]$$

$$du = dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \quad = \sqrt{2}e^4 \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{2}e^4 te^{-st}}{s} - \frac{\sqrt{2}e^4 e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{2}e^4 we^{-sw}}{s} - \frac{\sqrt{2}e^4 e^{-sw}}{s^2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}e^4(0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{\sqrt{2}e^4 e^{-s(0)}}{s^2} \right)$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sqrt{2}e^4 \infty}{e^{s(\infty)} s} - \frac{\sqrt{2}e^4}{e^{s(\infty)} s^2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}e^4}{s^2} \right)$$

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}e^4}{s^2}$$

f. Ejercicio

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$u = t \quad dv = e^{-st} dt \quad = \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt \right]$$

$$du = dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \quad = \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{we^{-sw}}{s} - \frac{e^{-sw}}{s^2} \right) - \left(-\frac{(0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s^2} \right)$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{\infty}{e^{s(\infty)} s} - \frac{1}{e^{s(\infty)} s^2} \right) - \left(-\frac{1}{s^2} \right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

g. Hallar $\mathcal{L}[e^{at}]$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{(-s+a)t} dt \\
 &= \left[\frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a} \right]_0^{\infty} \\
 &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{aw}}{(-s+a)e^{sw}} \right) - \left(\frac{e^{a(0)}}{(-s+a)e^{s(0)}} \right) \\
 F(s) &= \frac{1}{s-a}
 \end{aligned}$$

h. Hallar $\mathcal{L}[\cos(at)]$.

$$\begin{aligned}
 \cos at &= \frac{1}{2}(e^{jat} + e^{-jat}) \\
 \mathcal{L}[\cos at] &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{jat} + e^{-jat}) e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{(-s+ja)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-s-ja)t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{e^{(-s+ja)t}}{(-s+ja)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(-s-ja)t}}{(-s-ja)} \right]_0^{\infty} \right\} \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{e^{jaz}}{(-s+ja)e^{sz}} + \frac{1}{(-s-ja)e^{(s+ja)z}} - \frac{e^{ja(0)}}{(-s+ja)e^{s(0)}} - \frac{1}{(-s-ja)e^{(s+ja)(0)}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s-ja)} + \frac{1}{(s+ja)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{s+ja+s-ja}{s^2+a^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{s^2+a^2} \right] \\
 F(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}
 \end{aligned}$$

i. Hallar $\mathcal{L}[\text{sen } at]$ y $\mathcal{L}[\text{cos } at]$.

$$\text{sen } at = \frac{1}{2j}(e^{jat} - e^{-jat})$$

$$\mathcal{L}[\text{sen } at] = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{jat} - e^{-jat})e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{(-s+ja)t} dt - \int_0^{\infty} e^{(-s-ja)t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ \left[\frac{e^{(-s+ja)t}}{(-s+ja)} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{(-s-ja)t}}{(-s-ja)} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{jaz}}{(-s+ja)e^{sz}} - \frac{1}{(-s-ja)e^{(s+ja)z}} - \frac{e^{ja(0)}}{(-s+ja)e^{s(0)}} + \frac{1}{(-s-ja)e^{(s+ja)(0)}} \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s-ja)} - \frac{1}{(s+ja)} \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{s+ja-s+ja}{s^2+a^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{2ja}{s^2+a^2} \right]$$

$$\mathbf{F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

j. Ejercicio

$$f(t) = \text{sen}(pwt)u(t) \quad p \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}wt\right)u(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}wt\right) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}wt\right)\right\} &= \frac{1}{2j} \int_0^\infty \left(e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega t\right)} - e^{-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega t\right)}\right) e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{2j} \left[\int_0^\infty e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega t\right)-st} - \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega t\right)-st} \right] dt \\
&= \frac{1}{2j} \left[\int_0^\infty e^{-t\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} - \int_0^\infty e^{-t\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right] dt \\
&= \frac{1}{2j} \left\{ \left[-\frac{e^{-t\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right]_0^\infty \right\} \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[-\frac{e^{-z\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} + \frac{e^{-0\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} + \frac{e^{-z\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} - \frac{e^{-0\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{e^{z\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} + \frac{e^{-0\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} + \frac{1}{e^{z\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} - \frac{e^{-0\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)}}{\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{e^\infty\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} + \frac{1}{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} + \frac{1}{e^\infty\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} - \frac{1}{\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} - \frac{1}{\left(s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega\right)} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega - s+\frac{\sqrt{3}}{3}j\omega}{s^2 + \frac{1}{3}\omega^2} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{2j\frac{\sqrt{3}}{3}\omega}{s^2 - \frac{1}{3}j^2\omega^2} \right]
\end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}w}{s^2 + \frac{1}{3}w^2}$$

k. Ejercicio

$$f(t) = \cos(pwt)u(t) \quad p \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \cos(e^8wt)u(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\cos(e^8wt) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\mathcal{L}\{\cos(e^8wt)\} = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{e^8jw t} + e^{-e^8jw t})e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{(e^8jw t) - st} + \int_0^{\infty} e^{-(e^8jw t) - st} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t(s - e^8jw)} + \int_0^{\infty} e^{-t(s + e^8jw)} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{e^{-t(s - e^8jw)}}{(s - e^8jw)} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{-t(s + e^8jw)}}{(s + e^8jw)} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-z(s - e^8jw)}}{(s - e^8jw)} + \frac{e^{-0(s - e^8jw)}}{(s - e^8jw)} - \frac{e^{-z(s + e^8jw)}}{(s + e^8jw)} + \frac{e^{-0(s + e^8jw)}}{(s + e^8jw)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{e^{z(s - e^8jw)}(s - e^8jw)} + \frac{e^{-0(s - e^8jw)}}{(s - e^8jw)} - \frac{1}{e^{z(s + e^8jw)}(s + e^8jw)} + \frac{e^{-0(s + e^8jw)}}{(s + e^8jw)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{e^{\infty(s - e^8jw)}(s - e^8jw)} + \frac{1}{(s - e^8jw)} - \frac{1}{e^{\infty(s + e^8jw)}(s + e^8jw)} + \frac{1}{(s + e^8jw)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s - e^8jw)} + \frac{1}{(s + e^8jw)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{s + e^8jw + s - e^8jw}{s^2 + e^{16}w^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{s^2 + e^{16}w^2} \right]$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + e^{16}w^2}$$

1. Ejercicio

$$f(t) = pt^2u(t) \quad p \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \ln 13 t^2 u(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \ln 13 t^2 e^{-st} dt$$

$$= \ln 13 \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt$$

$$u = t^2 \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = 2t dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$= \ln 13 \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} 2t dt \right]$$

$$= \ln 13 \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \right]$$

$$u = t \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$= \ln 13 \left\{ -\frac{t^2 e^{-st}}{s} + \frac{2}{s} \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt \right] \right\}$$

$$= \ln 13 \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} + \frac{2}{s} \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right] \right]_0^{\infty}$$

$$= \ln 13 \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} - \frac{2te^{-st}}{s^2} - \frac{2e^{-st}}{s^3} \right]_0^{\infty}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \ln 13 \left[-\frac{z^2 e^{-sz}}{s} + \frac{(0)^2 e^{-s(0)}}{s} - \frac{2ze^{-sz}}{s^2} + \frac{2(0)e^{-s(0)}}{s^2} - \frac{2e^{-sz}}{s^3} + \frac{2e^{-s(0)}}{s^3} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \ln 13 \left[-\frac{1}{(\infty)^{-2} e^{s(\infty)} s} - \frac{2}{(\infty) e^{s(\infty)} s^2} - \frac{2}{e^{s(\infty)} s^3} + \frac{2}{s^3} \right] \\
&\quad \mathbf{F(s) = \frac{\ln 13(2)}{s^3}}
\end{aligned}$$

m. Ejercicio

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} t$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} t \right) e^{-st} dt$$

$$F(s) = \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} \int_0^{\infty} (t e^{-st}) dt$$

$$u = t \quad dv = e^{-st} dt \quad = \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt \right]$$

$$du = dt \quad v = -\frac{e^{-st}}{s} \quad = \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} \left[-\frac{te^{-st}}{s} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt \right]$$

$$= \left[-\frac{\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} te^{-st}}{s} - \frac{\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} we^{-sw}}{s} - \frac{\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} e^{-sw}}{s^2} \right) - \left(-\frac{\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} (0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4} e^{-s(0)}}{s^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{ab\sqrt[7]{947}we^{-sw}}{4s} - \frac{ab\sqrt[7]{947}e^{-sw}}{4s^2} \right) - \left(-\frac{ab\sqrt[7]{947}(0)e^{-s(0)}}{4s} - \frac{ab\sqrt[7]{947}e^{-s(0)}}{4s^2} \right) \\
&= \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{ab\sqrt[7]{947}\infty}{4e^{s(\infty)}s} - \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4e^{s(\infty)}s^2} \right) - \left(-\frac{ab\sqrt[7]{947}}{4s^2} \right) \\
&\quad \mathbf{F(s) = \frac{ab\sqrt[7]{947}}{4s^2}}
\end{aligned}$$

n. Ejercicio

$$f(t) = \text{sen}(pwt)u(t) \quad p \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}wt\right)u(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}wt\right) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$\mathcal{L}\left\{\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}wt\right)\right\} = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{\frac{\sqrt{2}}{4}j\omega t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}j\omega t})e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}j\omega - s\right)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}j\omega + s\right)t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{-t\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} dt - \int_0^{\infty} e^{-t\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2j} \left\{ \left[-\frac{e^{-t\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)}}{\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-t\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)}}{\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} \right]_0^{\infty} \right\}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[-\frac{e^{-z\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)}}{\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} + \frac{e^{-0\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)}}{\left(s - \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} + \frac{e^{-z\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)}}{\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} - \frac{e^{-0\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)}}{\left(s + \frac{\sqrt{2}}{4}j\omega\right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{e^{z\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)}\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} + \frac{e^{-0\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} + \frac{1}{e^{z\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)}\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} - \frac{e^{-0\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)}}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{e^{\infty\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)}\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} + \frac{1}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} + \frac{1}{e^{\infty\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)}\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} - \frac{1}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} - \frac{1}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw\right)} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw-s+\frac{\sqrt{2}}{4}jw}{s^2+\frac{1}{8}w^2} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{2j\frac{\sqrt{2}}{4}w}{s^2-\frac{1}{8}j^2w^2} \right] \\
\mathbf{F(s)} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}w}{s^2+\frac{1}{8}w^2}
\end{aligned}$$

Referencias

- Barajas Arenas, C., Parada Rico, S. E., & Molina Zavaleta, J. G. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación matemática*, 30(3), 297-323.
- Casado, E., Ortegón, J., & Blanqueto, M. (2019). Videos tutoriales para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden. *AMIUTEM*, 7(2), 21-36.
- Corrales Quesada, E., & López Gamboa, M. (2018). El análisis dimensional y el manejo algebraico en el contexto de la solución de ejercicios de física general 1.
- Deleg Sari, P. E., & Fajardo Tinizhañay, L. P. (2023). ABP como estrategia didáctica para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física en el tema Movimiento del 1ro de BGU (Bachelor's thesis, Universidad Nacional de Educación).
- Falsetti, M. C., Williner, B. S., Scorzo, R., & Favieri, A. G. (2021). Estudio sobre habilidades matemáticas y digitales en el aprendizaje de la derivada.
- Fernández Blanco, T., & Franco Ferreira, P. (2021). Percepción de los profesores de Formación Profesional sobre la competencia matemática en los Ciclos de Grado Superior. *Profesorado: revista de curriculum y formación del profesorado*.
- Geogebra. (2017, junio). Ecuación logarítmica. <https://www.geogebra.org/m/jmy5asds>
- Harrieta. (2016). 250 derivadas Muestra Infinito 2016 [PDF]. Idoc tips. <https://qdoc.tips/250-derivadas-muestra-infinito-2016-pdf-free.html>
- Hernández, U. S. (2022). Razonamiento Proporcional en la enseñanza de la física en nivel bachillerato. *Latin-American Journal of Physics Education*, 16(1), 6.
- Herrera, G. P., Valdivia, F. S. L., Urrutia, C. I. C., Martínez, W. I. M., & Castrillo, C. J. H. (2023). Implementación de la integral definida para el análisis de la viscosidad de fluidos. *Wani*, (79).
- Meriam, J. L., & Kraige, L. G. (2019). *Mecánica para ingenieros. Dinámica. II*. Reverté.
- Montaguano Toaquiza, J. A. (2018). Determinación de los parámetros térmicos de un intercambiador de calor de tubos concéntricos con fluidos orgánico-vapor (Bachelor's thesis, Cuba: Bayamo: Universidad de Granma).
- Ortiz, G. D., & Alvarado, L. V. M. (2021). Estrategia pedagógica mediada por una aplicación móvil, como apoyo al área de matemáticas, para fortalecer la solución de triángulos en el grado décimo.

- Pabon Santacruz, P. J. (2021). Influencia de una unidad didáctica centrada en el manejo de representaciones semióticas sobre el aprendizaje del concepto de energía.
- Paredes, G., & Valero, B. S. G. (2018). M-Learning: Revisión y análisis comparativo de algunas aplicaciones o apps de matemáticas. *Acción Pedagógica*, 27(1), 86-101.
- Pérez Pérez, W. A. (2023). Análisis matemático didáctico para generar y enseñar las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado.
- Ricardo, H. (2018). Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna. Reverte.
- Rodríguez, A. R. (2018). Cálculo Diferencial e Integral contextualizado a procesos vivenciales (Vol. 17). 3Ciencias.
- Studylib.es. (2019, abril). Determinar la carga total contenida en un plano [PDF]. <https://studylib.es/doc/5935832/determinar-la-carga-total-contenida-en-un-plano>
- Superprof. (2021, marzo). Ecuaciones trigonométricas. <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ecuaciones-trigonometricas.html>

ISBN: 978-9942-7134-8-3



Casa Editora