

PROPIEDADES Y OPERACIONES CON FUNCIONES ELEMENTALES

Autores:

Dr. Oscar Alejandro Guaypatín Pico, PhD.
Ing. Edwin Edison Quinatoa Arequipa, Mg.
Dr. José Augusto Cadena Moreano, PhD.
Ing. Cristian Iván Eugenio Pilliza, Mg.
Ing. Mirian Susana Pallasco Venegas, Mg.



Primera Edición 2024

ISBN: 978-9942-7194-4-7

2024, ALEMA Casa Editora-Editorial Internacional S.A.S

Calle Simón Bolívar. A 200 metros del Parque Central de Jipijapa. Jipijapa, Ecuador.

<https://editorialalema.org/libros/index.php/alema>

Diseño y diagramación:

Ing. Wilter Leonel Solórzano Álava, Mg.

Corrección de contenidos:

Dr. C. Omar Mar Cornelio, PhD.

Diseño, montaje y producción editorial:

ALEMA Casa Editora-Editorial Internacional S.A.S, Ecuador

Hecho en Ecuador, Made in Ecuador

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos.

Advertencia: “Quedan todos los derechos reservados. Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información existente o por existir, sin el permiso previo por escrito del titular de los derechos correspondientes”.

ISBN: 978-9942-7194-4-7



Propiedades y operaciones con funciones elementales

AUTORES

¹Oscar Alejandro Guaypatín Pico

Doctor en Educación. Magíster en Docencia Matemática. Ingeniero en Electrónica.
Docente Investigador Universidad Técnica de Cotopaxi. Ecuador
Correo: oscar.guaypatin@utc.edu.ec
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4208-7573>

²Edwin Edison Quinatoa Arequipa

Magíster en Sistemas de Información. Magíster en Ingeniería de Software. Ingeniero en Informática y Sistemas Computacionales.
Docente investigador Universidad Técnica de Cotopaxi. Ecuador
Correo: edwin.quinatoa@utc.edu.ec
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9701-7463>

³José Augusto Cadena Moreano

Doctor en Ingeniería de Sistemas e Informática. Magíster en Ciencias de la Educación Mención Planeamiento y Administración Educativa. Ingeniero en Informática y Sistemas Computacionales. Licenciado en Ciencias de la Educación en la Especialidad de Física y Matemáticas. Profesor de Educación Media en la Especialidad de Físico-Matemáticas.
Docente Investigador Universidad Técnica de Cotopaxi. Ecuador
Correo: jose.cadena@utc.edu.ec
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1775-252X>

⁴Cristian Iván Eugenio Pilliza

Magíster en Ingeniería Mecánica con Mención en Sistemas de Transporte. Ingeniero Mecánico
Docente Investigador Universidad Técnica de Cotopaxi. Ecuador
Correo: cristian.eugenio@utc.edu.ec
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5335-0977>

⁵Mirian Susana Pallasco Venegas

Magíster en Desarrollo Local. Magíster en Ciencias de la Educación Mención Planeamiento y Administración Educativa. Licenciada en Ciencias de la Educación Especialidad Física y Matemáticas.
Docente Investigador Universidad Técnica de Cotopaxi. Ecuador
Correo: mirian.pallasco@utc.edu.ec
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2351-7278>

Resumen

El libro "Propiedades y operaciones con funciones elementales" ofrece una exploración exhaustiva del concepto fundamental de las funciones, abarcando tanto la teoría como las aplicaciones prácticas en una y varias variables. El Capítulo I sienta las bases teóricas, examinando la definición, clasificación y propiedades esenciales de las funciones, así como las operaciones algebraicas y trascendentes que se pueden realizar con ellas. En el Capítulo II, se profundiza en el estudio de las funciones de una variable real, analizando sus características, gráficas, límites, continuidad, derivadas e integrales, con ejemplos ilustrativos y ejercicios prácticos. Finalmente, el Capítulo III amplía el horizonte al ámbito de las funciones de varias variables, abordando temas como dominios, límites, continuidad, derivadas parciales, diferenciales totales y aplicaciones en optimización y análisis vectorial. A lo largo del libro, se enfatiza la importancia de las funciones como herramientas esenciales en diversas áreas de las matemáticas, la física, la ingeniería y otras disciplinas científicas, brindando a los lectores una sólida comprensión teórica y habilidades prácticas para abordar problemas complejos.

Palabras clave: funciones; operaciones; propiedades; teoría; variable real; varias variables.

Abstract

The book "Properties and operations with elementary functions" offers a comprehensive exploration of the fundamental concept of functions, covering both theory and practical applications in one and several variables. Chapter I lays the theoretical groundwork, examining the definition, classification, and essential properties of functions, as well as the algebraic and transcendental operations that can be performed with them. In Chapter II, a deeper study of functions of a real variable is undertaken, analyzing their characteristics, graphs, limits, continuity, derivatives, and integrals, with illustrative examples and practical exercises. Finally, Chapter III broadens the horizon to the realm of functions of several variables, addressing topics such as domains, limits, continuity, partial derivatives, total differentials, and applications in optimization and vector analysis. Throughout the book, the importance of functions as essential tools in various areas of mathematics, physics, engineering, and other scientific disciplines is emphasized, providing readers with a solid theoretical understanding and practical skills to tackle complex problems.

Keywords: functions; operations; properties; theory; real variable; several variables.

Índice de contenidos

Resumen	13
Abstract.....	13
Índice de contenidos	14
Prólogo	17
Introducción.....	18
Capítulo I.- Teoría de las funciones	21
Estudio de funciones de una variable real	23
Ceros de una función:	26
Polos de una función	27
Interceptos con los ejes coordenados.....	29
Paridad	30
Signo de una función	32
Monotonía de una función.....	33
Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad	36
Función inversa	38
Periodicidad.....	41
Operaciones con funciones.....	43
Conclusiones del capítulo.....	46
Capítulo II.- Estudio de funciones de una variable real.	47
Función polinomial.....	47
Operaciones con funciones polinómicas	50
Teorema del resto	52
Graficación de funciones polinómicas	53
Raíces de un polinomio	55
Teorema de factorización	57
Teorema fundamental del álgebra	58
Teorema (polinomios con coeficientes complejos en general)	58
Polinomios con coeficientes reales.....	59
Función racional	61
Asíntotas verticales y asíntotas horizontales	64
Graficación de funciones racionales.....	65

Las funciones exponenciales	66
Propiedades de la función $f(x) = b^x$	69
Propiedades algebraicas de la función exponencial	69
Aplicaciones de la función exponencial	72
La función logarítmica.....	75
Dominio, rango y gráfica de la función logarítmica.....	77
Funciones trigonométricas circulares	79
El círculo unitario	80
Identidades trigonométricas básicas	81
Ángulos en posición estándar o normal.....	82
Medida de un ángulo	84
Definición de las funciones trigonométricas	85
Funciones trigonométricas de ángulos notables	86
Identidades trigonométricas básicas	89
Función parte entera	89
Función Signo.....	89
Función de Dirichlet	89
Transformaciones asociadas a una función:	90
Conclusiones del capítulo	90
Capítulo III.- Función de varias variables	92
Definición de función de varias variables	93
Curvas de nivel	95
Límite y continuidad.....	97
Derivadas parciales.....	99
Derivadas parciales de orden superior.....	102
Interpretación económica de las derivadas parciales.....	103
Elasticidades parciales.....	106
Diferencial total	108
Derivadas parciales de funciones compuestas.....	109
Aplicaciones	111
Derivada de funciones implícitas expresadas por una ecuación.....	112
Interpretación geométrica.....	114
Derivada de funciones implícitas definidas por sistemas de ecuaciones.....	118

Funciones homogéneas.....	119
Aplicaciones	122
Conclusiones del capítulo	125
Conclusiones.....	126
Referencias	127
Bibliografía.....	127

Índice de figuras

Figura 1. La parábola normal.	36
Figura 2. Ejemplo de función inyectiva en un intervalo de su dominio.....	37
Figura 3. Función inyectiva y su inversa.....	40
Figura 4. Función e inversa.	41
Figura 5. $y=\text{sen } x$	42
Figura 6. Gráfica de la función f definida por tramos y periódica $T=2$	43
Figura 7. Gráfica evaluada en dos puntos intermedios entre los interceptos.	55
Figura 8. Gráfico en una vecindad.	64
Figura 9. Gráfico en Derive.....	66
Figura 10. Gráfica construida en Derive.	74
Figura 11. Base b mayor que 1.....	77
Figura 12. Base b menor que 1.....	78
Figura 13. Función de varias variables.....	95
Figura 14. Ecuación de la Tangente 1.	115
Figura 15. Ecuación de la Tangente 2.	115

Prólogo

Es un placer presentar "Propiedades y operaciones con funciones elementales", un libro diseñado para explorar y comprender en profundidad uno de los pilares fundamentales de las matemáticas: las funciones elementales.

En la vasta panoplia del conocimiento matemático, las funciones elementales destacan como herramientas poderosas y versátiles para modelar y resolver una amplia gama de fenómenos en diferentes disciplinas. Desde la descripción de movimientos físicos hasta el análisis de tendencias económicas, las funciones elementales ofrecen un lenguaje común y potente para expresar y comprender relaciones fundamentales en el universo.

Este libro se embarca en un viaje desde los fundamentos más básicos hasta las aplicaciones más avanzadas de las funciones elementales. A lo largo de sus páginas, los lectores serán guiados a través de conceptos clave, propiedades esenciales y operaciones fundamentales que definen el estudio de estas funciones. Desde las funciones algebraicas hasta las trigonométricas, pasando por las exponenciales y logarítmicas, cada tipo de función se presenta de manera clara y accesible, con ejemplos ilustrativos y ejercicios prácticos que refuerzan la comprensión.

Además de explorar las propiedades individuales de cada tipo de función, este libro se adentra en cómo estas funciones interactúan y se combinan entre sí mediante operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división. Se analiza detalladamente la composición de funciones, las funciones inversas y la resolución de ecuaciones y desigualdades, mostrando cómo estas herramientas pueden aplicarse en una amplia variedad de situaciones problemáticas.

Con un enfoque en la claridad expositiva y la comprensión conceptual, "Propiedades y operaciones con funciones elementales" está diseñado para ser un recurso valioso tanto para estudiantes como para profesionales de las matemáticas. Ya sea que estés iniciando tu viaje en el estudio de las funciones o buscando fortalecer tus habilidades en este campo, este libro te proporcionará una base sólida y una comprensión profunda de un tema fundamental en las matemáticas.

Espero que encuentres este libro útil y estimulante en tu exploración de las funciones elementales, y que te inspire a descubrir nuevas conexiones y aplicaciones en el maravilloso mundo de las matemáticas.

¡Que disfrutes el viaje!

LOS AUTORES.

Introducción

Los autores para este libro asumen que la Matemática es la ciencia que estudia las propiedades de los números y las relaciones que se establecen entre ellos, es la ciencia deductiva que se dedica al estudio de las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones. Esto quiere decir que las matemáticas trabajan con números, símbolos, figuras geométricas, funciones y relaciones, entre otras.

Los orígenes de la noción de función y su influencia significativa en la evolución de la ciencia pueden fijarse en el siglo XVII. El concepto de función aparece explícitamente en Leibniz (1682) y es utilizado por Bernoulli desde 1694. Euler en 1734 introdujo el símbolo $f(x)$.

El concepto general de función algebraica, incluso no expresable por radicales, fue claramente definido por Euler, quien le llamara función trascendente. A partir de un cierto momento, se atendió a la correspondencia en sí misma al considerar el concepto de función, quedando establecida por Dirichlet como concepto general en 1854: “como una correspondencia arbitraria entre dos variables”.

En el presente libro se estudia lo más importante del análisis, el cual, está referido al concepto de función, hay algunas formas específicas para definirlo y se hace énfasis en algunas características fundamentales que le están asociadas con vistas a su ulterior aplicación.

Durante todo el desarrollo del libro, serán de uso muy frecuente para calcular límites y derivadas, así como para la representación gráfica de las funciones elementales de variable real, de las que se hace un breve estudio, destacando los aspectos básicos más relevantes cuyo uso será frecuente. Una de las funciones de mayor uso y la más simple en su expresión, son las polinomiales.

Se pretende mostrar cómo la matemática y en particular el análisis de funciones tiene importancia en la formulación de modelos matemáticos y puede utilizarse para resolver problemas reales como los que se presentan en el mundo de los negocios, las ciencias y la vida real, además de superar las dificultades que presentan los estudiantes en el tema de funciones, promoviendo de este modo un aprendizaje con significación social y utilidad práctica.

Las funciones elementales son las herramientas básicas del análisis matemático. Son funciones que se definen de forma simple y que se pueden combinar para construir funciones más complejas. El estudio de las propiedades y operaciones con funciones

elementales es fundamental para comprender el comportamiento de funciones más generales y para resolver problemas en diversas áreas de la matemática, la ciencia y la ingeniería.

En este libro, se presenta un estudio sistemático de las propiedades y operaciones con las siguientes funciones elementales:

- Funciones polinómicas: Son funciones de la forma $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, donde $a_n \neq 0$.
- Funciones racionales: Son funciones de la forma $f(x)=\frac{q(x)}{p(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas y $p(x) \neq 0$.
- Funciones radicales: Son funciones de la forma $f(x)=\sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo.
- Funciones exponenciales: Son funciones de la forma $f(x)=a^x$, donde a es un número real positivo.
- Funciones logarítmicas: Son funciones de la forma $f(x)=\log_a x$, donde a es un número real positivo y $a \neq 1$.

Los temas que se cubrirán en este libro incluyen:

- Dominio y recorrido de funciones elementales.
- Comportamiento monótono y asintótico de funciones elementales.
- Operaciones con funciones elementales, como suma, resta, multiplicación y división.
- Composición de funciones elementales.
- Funciones inversas de funciones elementales.
- Aplicaciones de las funciones elementales en la resolución de problemas.

Este libro está dirigido a estudiantes de:

- Cálculo I y II
- Matemáticas básicas para ingeniería
- Física

- Otras áreas de la ciencia y la ingeniería

Se espera que el lector tenga conocimientos previos de:

- Álgebra elemental
- Trigonometría
- Al finalizar este libro, el lector será capaz de:
- Comprender las propiedades básicas de las funciones elementales.
- Realizar operaciones con funciones elementales.
- Resolver problemas utilizando funciones elementales.
- Comprender el papel de las funciones elementales en el análisis matemático.

Este libro se ha escrito con un estilo claro y conciso. Se incluyen ejemplos y ejercicios para ilustrar los conceptos y para ayudar al lector a comprenderlos mejor. Este libro es un recurso valioso para los estudiantes que se inician en el estudio de las funciones elementales.

Capítulo I.- Teoría de las funciones

Las funciones son uno de los conceptos fundamentales de la matemática. Son relaciones que asignan a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro conjunto. Las funciones se utilizan para modelar una amplia variedad de fenómenos en la naturaleza, la ciencia y la ingeniería.

La teoría de las funciones es una rama de la matemática que estudia las propiedades de las funciones. Esta teoría proporciona un marco para comprender cómo se comportan las funciones y para resolver problemas que involucran funciones.

En este capítulo, se presenta una introducción a la teoría de las funciones. Se cubren los siguientes temas:

- Definición formal de una función.
- Clasificación de funciones.
- Dominio y recorrido de una función.
- Comportamiento monótono y asintótico de una función.
- Operaciones con funciones.
- Composición de funciones.
- Funciones inversas.

Al finalizar este capítulo, el lector es capaz de:

- Definir formalmente una función.
- Clasificar funciones según diferentes criterios.
- Determinar el dominio y recorrido de una función.
- Analizar el comportamiento monótono y asintótico de una función.
- Realizar operaciones con funciones.
- Componer funciones.
- Encontrar la función inversa de una función.

Este capítulo sienta las bases para el estudio más avanzado de las funciones en capítulos posteriores. Se incluyen ejemplos y ejercicios para ilustrar los conceptos y para ayudar al lector a comprenderlos mejor.

La teoría de las funciones es una rama de la matemática que se ha desarrollado durante siglos. Los primeros estudios sobre funciones se remontan a la antigua Grecia, donde matemáticos como Euclides y Arquímedes estudiaron las propiedades de las funciones polinomiales y trigonométricas.

En el siglo XVII, René Descartes introdujo el concepto de función como una relación entre dos variables. Este avance permitió un estudio más sistemático de las funciones y condujo al desarrollo de nuevas herramientas matemáticas, como el cálculo infinitesimal. En los siglos XVIII y XIX, matemáticos como Leonhard Euler, Joseph Lagrange y Carl Friedrich Gauss hicieron importantes contribuciones a la teoría de las funciones. Estos matemáticos estudiaron las propiedades de las funciones analíticas, como las funciones polinomiales, exponenciales y logarítmicas.

En el siglo XX, la teoría de las funciones se expandió significativamente con el desarrollo de nuevas áreas de la matemática, como la teoría de la medida, el análisis funcional y la topología. Estos avances permitieron un estudio más profundo de las funciones y sus aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

En la actualidad, la teoría de las funciones es una rama vibrante de la matemática con una amplia gama de aplicaciones. Las funciones se utilizan para modelar una amplia variedad de fenómenos en la naturaleza, la ciencia y la ingeniería.

Algunos de los temas de investigación actuales en la teoría de las funciones incluyen:

- Estudio de las propiedades de las funciones especiales, como las funciones zeta y gamma.
- Desarrollo de nuevas herramientas para el análisis de funciones.
- Aplicaciones de las funciones a la resolución de problemas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Algunos de los avances más importantes en la teoría de las funciones en los últimos años son:

- En 2003, Grigori Perelman demostró la conjetura de Poincaré, uno de los problemas más importantes de la topología. Esta demostración tuvo un impacto

significativo en la teoría de las funciones, ya que proporcionó una nueva comprensión de las propiedades de las funciones holomorfas.

- En 2014, Terence Tao y Martin Hairer ganaron el Premio Fields por sus contribuciones al análisis armónico y a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Estos trabajos han tenido un impacto significativo en la teoría de las funciones, ya que han proporcionado nuevas herramientas para el estudio de las funciones no lineales.
- En 2019, Akshay Venkatesh ganó el Premio Fields por sus contribuciones a la teoría de números y a la teoría de la representación. Estos trabajos han tenido un impacto significativo en la teoría de las funciones, ya que han proporcionado nuevas conexiones entre la teoría de números y la teoría de las funciones.

La teoría de las funciones es una rama de la matemática en constante desarrollo. Los nuevos avances en esta área tienen un impacto significativo en la ciencia y la ingeniería. Se espera que la teoría de las funciones continúe siendo un área de investigación activa en los próximos años.

Estudio de funciones de una variable real

El estudio de funciones de una variable real es una rama fundamental de las matemáticas con una larga y rica historia. Desde sus inicios en la antigua Grecia hasta su desarrollo actual, esta área ha experimentado un avance significativo, con importantes contribuciones de matemáticos de todo el mundo.

A continuación, se presenta una breve reseña de algunos de los hitos más importantes en el estudio de funciones de una variable real:

- Siglo XVII: René Descartes introduce el concepto de función como una relación entre dos variables, lo que marca el inicio del estudio formal de las funciones.
- Siglo XVIII: Leonhard Euler y Joseph Lagrange realizan importantes contribuciones al estudio de las funciones polinomiales y trigonométricas, sentando las bases para el desarrollo del cálculo infinitesimal.
- Siglo XIX: Carl Friedrich Gauss y otros matemáticos expanden el estudio de las funciones a funciones más complejas, como las funciones exponenciales y logarítmicas.

- Siglo XX: El desarrollo de nuevas áreas de la matemática, como la teoría de la medida, el análisis funcional y la topología, permite un estudio más profundo de las funciones y sus aplicaciones.

En la actualidad, el estudio de funciones de una variable real continúa siendo un área vibrante de la matemática con una amplia gama de aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Algunos de los temas de investigación actuales en este campo incluyen:

- Estudio de las propiedades de las funciones especiales, como las funciones zeta y gamma.
- Desarrollo de nuevas herramientas para el análisis de funciones, como la teoría de la aproximación y el análisis numérico.
- Aplicaciones de las funciones a la resolución de problemas en áreas como la física, la ingeniería, la economía y las finanzas.

Algunos de los avances más recientes en el estudio de funciones de una variable real:

- En 2013, Terence Tao y Martin Hairer ganaron el Premio Fields por sus contribuciones al análisis armónico y a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Estos trabajos han tenido un impacto significativo en el estudio de las funciones, ya que han proporcionado nuevas herramientas para el estudio de las funciones no lineales.
- En 2019, Akshay Venkatesh ganó el Premio Fields por sus contribuciones a la teoría de números y a la teoría de la representación. Estos trabajos han tenido un impacto significativo en el estudio de las funciones, ya que han proporcionado nuevas conexiones entre la teoría de números y la teoría de las funciones.

El estudio de funciones de una variable real es un área de la matemática con un pasado rico y un futuro prometedor. Los nuevos avances en este campo continuarán teniendo un impacto significativo en la ciencia y la ingeniería.

Definición

“Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si a cada elemento de A le hacemos corresponder de alguna manera, un ÚNICO elemento en B decimos que dicha correspondencia define una función o aplicación del conjunto A en B ”.

Nota: Estos tipos de correspondencia unívoca, algunos autores la denominan función UNIFORME. Salvo advertencia en contrario, sólo trabajaremos con funciones UNIFORMES.

NOTACIÓN $f: A \longrightarrow B$
 $x \quad \text{-----} \quad y = f(x)$

Al conjunto A se le denomina CONJUNTO DE PARTIDA o DOMINIO de la función.

Al conjunto B se le llama CONJUNTO DE LLEGADA.

El elemento “y” imagen por f de cada elemento “x” de A se le llama imagen, y al conjunto de todas esas imágenes se les llama IMAGEN DE f o RECORRIDO de f (en este libro se le llama RANGO DE f, lo cual no es muy habitual).

Se denota por: $\text{Im } f = \{y \in B : y = f(x), x \in A\} \subseteq B$ y $\text{dom } f = A = \text{Conj. partida}$

Ejemplos de función:

- a) A cada número real “x” se le asocia su cuadrado “x²”
- b) A cada país del mundo se le hace corresponder su ciudad capital.

Es bueno destacar que los conjuntos A y B no tienen que ser necesariamente numéricos. Cuando A y B son subconjuntos de los números reales, entonces f se denomina función real de una variable real. Es costumbre en tal caso utilizar para la designación de la variable la letra “x” (variable independiente) y para la imagen de cada elemento x de A utilizar la letra “y” (variable dependiente).

Otra posible forma de definir el concepto de FUNCIÓN puede ser a través de un conjunto de pares ordenados de modo tal que las primeras componentes no aparezcan repetidas en más de un par ordenado.

Por tanto: $f = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$

Gráficamente puede identificarse que estamos en presencia de la gráfica de una función cuando al trazar rectas paralelas al eje de las “y” éstas cortan dicha gráfica en un solo punto. Si alguna recta corta a la gráfica en más de un punto, entonces, ese gráfico no se corresponde con el de una función (al menos, uniforme).

Una función puede estar definida de manera explícita por una ecuación determinada, puede definirse mediante alguna descripción, o por varias fórmulas matemáticas (por tramos), etc.... entre otras formas.

Ejemplos: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^2 + x + 1$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto g(x) = \sin(3x+2)$

c)
$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x > 0 \\ x - 5x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d) Cierta función f hace corresponde a cada país del mundo con su ciudad capital.

e) Función definida por pares ordenados: $S = \{(-2,4), (2,-1), (3,2), (4,-4), (5,8)\}$

En este caso: $\text{dom } S = \{-2, 2, 3, 4, 5\}$ $\text{Rango } S = \text{Im } S = \{4, -1, 2, -4, 8\}$

Ceros de una función:

Los ceros de una función, también conocidos como raíces o soluciones, son los valores de la variable independiente que hacen que el valor de la función sea cero. En otras palabras, son los puntos donde la gráfica de la función intersecta el eje X.

Formalmente, si f es una función definida en un conjunto D , un cero de f es un valor $x \in D$ tal que $f(x)=0$.

Existen diferentes tipos de ceros, dependiendo de su comportamiento:

- Ceros simples: Son aquellos en los que la función cambia de signo al pasar por el cero.
- Ceros dobles: Son aquellos en los que la función no cambia de signo al pasar por el cero.
- Ceros de orden n : Son aquellos en los que la función cambia de signo n veces al pasar por el cero.

Los ceros de una función tienen importantes aplicaciones en diversas áreas de la matemática y la ciencia. Por ejemplo, se utilizan para:

- Encontrar las intersecciones de dos funciones.
- Resolver ecuaciones.
- Analizar el comportamiento de una función.
- Aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.

Existen diferentes métodos para encontrar los ceros de una función:

- Métodos gráficos: Se basan en la gráfica de la función para encontrar los puntos donde intersecta el eje X.
- Métodos analíticos: Se basan en técnicas matemáticas para encontrar las soluciones de la ecuación $f(x)=0$.
- Métodos numéricos: Se basan en algoritmos para encontrar aproximaciones a las soluciones de la ecuación $f(x)=0$.

La elección del método para encontrar los ceros de una función depende de la naturaleza de la función y del tipo de información que se necesita.

Aquí hay algunos ejemplos de ceros de funciones:

- La función $f(x)=x^2-1$ tiene dos ceros: $x=1$ y $x=-1$.
- La función $f(x)=x^3+2x^2+x+1$ tiene un solo cero: $x=-1$.
- La función $f(x)=\sin(x)$ tiene infinitos ceros: $x=k\pi$, donde k es un entero.

z_0 es un cero de f si y sólo si $f(x_0)=0$

De acuerdo con la definición, para hallar los ceros de cierta función conocida su expresión analítica $y = f(x)$ basta resolver la ecuación $f(x)=0$.

Geométricamente los ceros de f pueden interpretarse como los puntos donde la gráfica de f corta al eje “x”, es decir, los denominados interceptos con el eje “x”.

Polos de una función

Los polos de una función son puntos singulares en el dominio de la función donde la función tiende a infinito. En otras palabras, son puntos donde la función no está definida o donde su valor se vuelve infinito.

Formalmente, un polo de una función f es un punto a en el dominio de f tal que:

- $f(a)$ no está definido.
- Para cualquier secuencia $\{z_n\}$ que converge a a , la secuencia $\{f(z_n)\}$ diverge a infinito.

Existen diferentes tipos de polos, dependiendo de su comportamiento:

- Polos simples: Son aquellos en los que la función tiene un comportamiento similar a $z-a$.

- Polos dobles: Son aquellos en los que la función tiene un comportamiento similar a $(z-a)^{-2}$.
- Polos de orden n : Son aquellos en los que la función tiene un comportamiento similar a $(z-a)^{-n}$.

Los polos de una función tienen importantes aplicaciones en diversas áreas de la matemática y la ciencia. Por ejemplo, se utilizan para:

- Analizar el comportamiento de una función.
- Encontrar las intersecciones de dos funciones.
- Resolver ecuaciones diferenciales.
- Aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.

Existen diferentes métodos para encontrar los polos de una función:

- Factorizar la función: Si la función se puede factorizar, los polos son los valores que hacen que uno de los factores sea cero.
- Utilizar el teorema del residuo: Este teorema proporciona una fórmula para calcular el residuo de una función en un polo.
- Utilizar métodos numéricos: Se basan en algoritmos para encontrar aproximaciones a los polos de una función.

La elección del método para encontrar los polos de una función depende de la naturaleza de la función y del tipo de información que se necesita.

Aquí hay algunos ejemplos de polos de funciones:

- La función $f(x)=x^{-1}$ tiene un polo en $x=0$.
- La función $f(x)=(x-1)^{-1}(x-2)^{-1}$ tiene dos polos: $x=1$ y $x=2$.
- La función $f(x)=\tan(x)$ tiene infinitos polos: $x=2(2n+1)\pi$, donde n es un entero.

x_0 es un polo de $f(x) = P(x)/Q(x)$ si y sólo si $P(x_0) \neq 0$ con $Q(x_0) = 0$

El concepto de POLOS está referido a funciones que tengan denominadores, funciones racionales, de modo que los polos, son los ceros del denominador que a su vez no anulan al numerador. Aquellos valores que anulen simultáneamente a ambos términos de la expresión fraccionaria no son polos de ella, ni tampoco ceros de ella.

Queda igualmente claro que los CEROS de este tipo de función son los valores que anulan el NUMERADOR pero que no anulan simultáneamente al DENOMINADOR.

Interceptos con los ejes coordenados

Los interceptos con los ejes coordenados son los puntos donde una gráfica intersecta los ejes X e Y. Estos puntos son importantes para entender el comportamiento de la función y para realizar análisis matemáticos.

Tipos de Interceptos:

- Intercepto con el eje X: Este punto se encuentra en la coordenada $(x,0)$, donde la función cruza el eje X. Para encontrarlo, se debe despejar la variable y en la ecuación de la función y dejarla igual a cero.
- Intercepto con el eje Y: Este punto se encuentra en la coordenada $(0, y)$, donde la función cruza el eje Y. Para encontrarlo, se debe despejar la variable x en la ecuación de la función y dejarla igual a cero.

Ejemplos:

- Función lineal: La función $f(x)=2x+3$ intersecta el eje Y en el punto $(0,3)$ y el eje X en el punto $(-23,0)$.
- Función cuadrática: La función $f(x)=x^2-4x+4$ intersecta el eje X en los puntos $(1,0)$ y $(3,0)$ y el eje Y en el punto $(0,4)$.

Aplicaciones:

- Análisis del comportamiento de la función: Los interceptos pueden indicar si la función es creciente o decreciente, si tiene un máximo o un mínimo, y si tiene asíntotas.
- Resolución de ecuaciones: Los interceptos pueden ayudar a encontrar las soluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones.
- Aplicaciones en física e ingeniería: Los interceptos se pueden utilizar para modelar fenómenos físicos y para realizar cálculos en ingeniería.

Los interceptos con los ejes coordenados son puntos importantes en la gráfica de una función que ofrecen información valiosa sobre su comportamiento y aplicaciones.

Ya dijimos que los interceptos con el eje “x” no son más que los CEROS de f .

Los interceptos con el eje “y” se determinan haciendo $x = 0$ en la expresión de f y determinando los valores de “y” correspondientes.

Paridad

La paridad es un concepto matemático que se refiere a la simetría de una función o una secuencia con respecto a un eje. Existen dos tipos de paridad:

1. Paridad par:

- Una función es par si para cada valor x en su dominio, $f(-x) = f(x)$.
- Una secuencia es par si para cada índice n , $a_{-n} = a_n$.

Ejemplos de funciones pares:

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \cos(x)$
- $f(x) = |x|$

Ejemplos de secuencias pares:

- (1,2,3,2,1)
- (0,4,0,4,0)

2. Paridad impar:

- Una función es impar si para cada valor x en su dominio, $f(-x) = -f(x)$.
- Una secuencia es impar si para cada índice n , $a_{-n} = -a_n$.

Ejemplos de funciones impares:

- $f(x) = x$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = x^3$

Ejemplos de secuencias impares:

- (1,2,-3,2,-1)
- (0,1,-2,1,0)

Propiedades:

- La suma de dos funciones pares es una función par.

- La suma de dos funciones impares es una función impar.
- El producto de dos funciones pares es una función par.
- El producto de dos funciones impares es una función par.
- El producto de una función par y una función impar es una función impar.

Aplicaciones:

- La paridad se utiliza en el análisis de Fourier para descomponer una función en una suma de funciones pares e impares.
- La paridad se utiliza en la teoría de números para estudiar las propiedades de los números primos.
- La paridad se utiliza en la informática para la detección y corrección de errores.

La paridad es un concepto importante en matemáticas con diversas aplicaciones en diferentes áreas. Esta propiedad caracteriza la simetría de la gráfica de f respecto a alguna recta.

Definición:

$$f \text{ es PAR en } (-a, a), a > 0 \Leftrightarrow f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \text{dom}f$$

De modo que el gráfico de una función PAR es simétrico respecto al eje “y”.

Similarmente:

$$f \text{ es IMPAR en } (-a, a), a > 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \text{dom}f$$

Lo que significa que la gráfica de f en este caso es simétrica respecto al origen.

Ejemplos:

- $f(x) = x^2$ es una función PAR en cualquier intervalo simétrico del origen y su gráfica es simétrica respecto al eje “y”
- $g(x) = x^3$ es obviamente una función IMPAR, su gráfica es simétrica respecto al origen.

c) $w(x) = |x|$ es también PAR y su gráfica es simétrica respecto al eje “y”.

d) $h(x) = \frac{4x}{x^2 + x + 1}$ no es ni PAR ni IMPAR. Observe que al reemplazar “x” por “-x” no se cumple ninguna de las dos definiciones.

Signo de una función

El signo de una función es una herramienta matemática que nos permite determinar si el valor de la función es positivo, negativo o cero para un valor dado de la variable independiente.

Definición formal:

El signo de una función $f(x)$ se define como:

- $f(x) > 0$ si x está en el dominio de f y $f(x)$ es positivo.
- $f(x) < 0$ si x está en el dominio de f y $f(x)$ es negativo.
- $f(x) = 0$ si x está en el dominio de f y $f(x)$ es igual a cero.

Representación gráfica:

El signo de una función se puede representar gráficamente mediante una tabla de signos o una gráfica de signos:

- Tabla de signos: Se divide la recta real en intervalos de acuerdo con los cambios de signo de la función. En cada intervalo, se indica si la función es positiva, negativa o cero.
- Gráfica de signos: Se dibuja una línea por encima del eje X cuando la función es positiva y por debajo del eje X cuando la función es negativa.

Ejemplos:

- Función $f(x) = x^2$:
 - $f(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
 - $f(x) = 0$ para $x = -1, 1$.
 - $f(x) < 0$ para $x \in (-1, 1)$.

Tabla de signos:

Intervalo	Signo	--- ---	$x < -1$	+	$-1 < x < 1$	-	$x > 1$	+	
-----------	-------	---------	----------	---	--------------	---	---------	---	--

Gráfica de signos:

Signo de la función $f(x) = x^2$: [se quitó una URL no válida]

- Función $f(x)=\sin(x)$:
 - $f(x)>0$ para $x \in (2\pi n, 2\pi n + 2\pi)$, donde n es un entero.
 - $f(x)=0$ para $x=2\pi n, 2\pi n + 2\pi$, donde n es un entero.
 - $f(x)<0$ para $x \in (2\pi n + 2\pi, 2\pi n + 4\pi)$, donde n es un entero.

Tabla de signos:

Intervalo	Signo	--- ---	$2\pi n < x < 2\pi n + 2\pi$	+	$2\pi n + 2\pi < x < 2\pi n + 4\pi$	-	
$2\pi n + \pi < x < 2\pi n + 2\pi$							

Gráfica de signos:

Signo de la función $f(x) = \sin(x)$: [se quitó una URL no válida]

Aplicaciones:

- La determinación de los intervalos donde una función es monótona creciente o decreciente.
- La resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- El estudio del comportamiento de las funciones.

El signo de una función es una herramienta útil para analizar el comportamiento de las funciones y resolver problemas matemáticos.

Si $f(x) > 0$ para todo x de cierto intervalo I entonces f es POSITIVA en dicho intervalo I

Si $f(x) < 0$ para todo x de cierto intervalo I entonces f es NEGATIVA en dicho intervalo I

Tener información del signo de una función en cierto intervalo I , ofrece la ventaja de poner conocer que el gráfico de f en dicho intervalo está por encima (si f es POSITIVA) del eje “ x ” o por debajo del eje “ x ” (si f es NEGATIVA).

Monotonía de una función

La monotonía de una función se refiere a su comportamiento en cuanto a si aumenta o disminuye a medida que aumenta la variable independiente.

Definición formal:

- Función monótona creciente: Una función f es monótona creciente en un intervalo I si para cualquier $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Función monótona decreciente: Una función f es monótona decreciente en un intervalo I si para cualquier $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Tipos de monotonía:

- Monotonía estricta: Si la desigualdad en la definición es estricta ($f(x_1) < f(x_2)$) para $x_1 < x_2$, la función es monótona creciente o decreciente estricta.
- Monotonía no estricta: Si la desigualdad en la definición no es estricta ($f(x_1) \leq f(x_2)$) para $x_1 < x_2$, la función es monótona creciente o decreciente no estricta.

Teorema de la Monotonía: Si la derivada de una función f es positiva en un intervalo, entonces la función es monótona creciente en ese intervalo. Si la derivada es negativa, la función es monótona decreciente.

Ejemplos:

- Función $f(x)=x^2$:
 - f es monótona creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- Función $f(x)=\sin(x)$:
 - f es monótona creciente en los intervalos $(2\pi n, 2\pi n + 2\pi)$, donde n es un entero.
 - f es monótona decreciente en los intervalos $(2\pi n + 2\pi, 2\pi n + 4\pi)$, donde n es un entero.

Aplicaciones:

- La determinación de los intervalos donde una función es invertible.
- La resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- El estudio del comportamiento de las funciones.

La monotonía de una función es una propiedad importante que nos permite comprender mejor su comportamiento y sus aplicaciones.

Intuitivamente podemos definir el concepto de función monótona en cierto intervalo, independientemente de que este concepto será muy bien formalizado más adelante, cuando estudiemos la DERIVADA.

Por el momento, puede definirse así:

f es monótona estrictamente creciente sobre un intervalo I sí y sólo sí para todo x_1, x_2 del dominio de f se cumple que: Si $x_1 > x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Similarmente:

f es monótona estrictamente decreciente sobre un intervalo I sí y sólo sí para todo x_1, x_2 del dominio de f se cumple que: Si $x_1 > x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Con esta información es posible determinar con exactitud la existencia de algún posible punto de MÁXIMO o MÍNIMO local de f en dicho intervalo.

Si se conoce que en la vecindad de un punto x_0 f cambia la monotonía de decreciente a creciente, entonces diremos que en x_0 hay un punto de MÍNIMO LOCAL. El valor $f(x_0)$ se llama MÍNIMO LOCAL de f en dicho punto.

Similarmente, si se conoce que en la vecindad de un punto x_0 f cambia la monotonía de creciente a decreciente, entonces diremos que en x_0 hay un punto de MÁXIMO LOCAL. El valor $f(x_0)$ se llama MÁXIMO LOCAL de f en dicho punto.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$ definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

En este caso es fácil observar que:

- a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$, puesto que esta función nunca se indefine en ningún valor real.
- b) $\text{Im } f = \mathbb{R}_+$, porque siempre $x^2 \geq 0$ para todo x real.
- c) Por lo anterior, se conoce que la función es POSITIVA en todo $\mathbb{R}$, excepto en un único punto: $x = 0$ donde se anula.
- d) El punto $x = 0$ es el único CERO de f en $\mathbb{R}$, ya que no existen otros valores donde $f(x) = 0$.
- e) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es monótona estrictamente decreciente y en el intervalo $(0, +\infty)$ es monótona estrictamente creciente, por tanto, en una vecindad de $x = 0$ hay un cambio de monotonía de f , luego, $x = 0$ es un punto de MÍNIMO LOCAL, y $f(0) = 0$ es el valor MÍNIMO de f en todo su dominio.
- f) Como para todo x real se cumple que $f(-x) = f(x)$ entonces la función es PAR en cualquier intervalo simétrico al origen.
- g) La gráfica de la función es muy sencilla y harto conocida por el lector desde niveles precedentes:

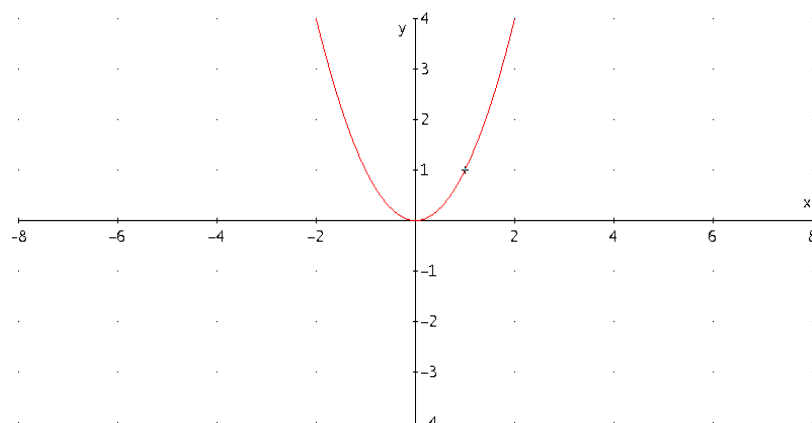


Figura 1. La parábola normal.

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Estas propiedades asociadas a una función nos permitirán definir el concepto de función inversa, como lo es el caso de la inyectividad.

Definición: Sea $f: A \rightarrow B$ una función cualquiera.

f es inyectiva en cierto intervalo I de su dominio, sí y sólo sí, para cualesquiera dos puntos $x_1 \neq x_2$ entonces se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Si analizamos el sentido que tiene la definición, nos daremos cuenta, que inyectividad significa que dos preimágenes de una función no pueden tener una misma imagen.

Por tal motivo, en el ejemplo anterior, $f(x) = x^2$ es una función **FRANCAMENTE** no inyectiva, pues baste sólo poner como contraejemplo:

Si tomamos $x = -1$ y $x = 1$ que sabemos son diferentes entonces sin embargo ocurre que $f(1) = f(-1)$ lo cual no satisface la definición.

Equivalentemente, puede decirse que una función es inyectiva sí y sólo sí $f(x_1) = f(x_2)$ entonces implica que $x_1 = x_2$.

La justificación de tal equivalencia puede verla cuando estudie **LÓGICA MATEMÁTICA** y sepa que toda proposición lógica establecida mediante una equivalencia de otras proposiciones y su contrarrecíproco son equivalentes.

Para reconocer geométicamente que una función es INYECTIVA bastará trazar rectas paralelas al eje “x”. Si al menos una recta corta a la gráfica de una función en al más de un punto, la función NO ES INYECTIVA y si para toda recta que tracemos paralela al eje “x” ocurra que corte a la gráfica de f en sólo un punto, entonces es INYECTIVA.

Si una función no es inyectiva, es posible transformarla en inyectiva, restringiendo el DOMINIO a los valores que garanticen la definición.

Por ejemplo, en el caso que estamos analizando, si restringimos el dominio de definición de $f(x) = x^2$ a los reales positivos, lo que equivale a tomar de la gráfica solo la rama derecha, entonces, la función sí es INYECTIVA.

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Es decir: $x \rightarrow y = x^2$ Es una función inyectiva.

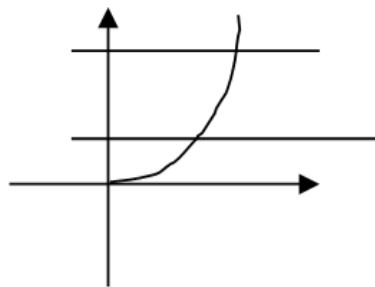


Figura 2. Ejemplo de función inyectiva en un intervalo de su dominio.

Definición: Sea $f: A \rightarrow B$ una función cualquiera.

f es SOBREYECTIVA en un intervalo I y sólo si $\text{Im } f = B = \text{Conjunto de llegada}$

En el caso de la sobreyectividad, lo que se plantea es que cuando todo elemento del conjunto B (conjunto de llegada) tiene una preimagen en A (dominio) entonces la función es SOBREYECTIVA. En estos casos se dice que no hay elementos en B que no tengan una preimagen en A .

Algunos autores denominan a este concepto epiyectiva.

La función $f(x) = x^2$ que hemos venido analizando ya vimos que restringiendo el dominio pudimos transformarla en inyectiva, pues bien, en este caso, si restringimos el conjunto de llegada al conjunto IMAGEN que sabemos es todos los reales positivos (como ya explicamos antes) entonces logramos la sobreyectividad de esta función.

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

Es decir: $x \rightarrow y = x^2$ es una función inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Cuando sucede que una función es inyectiva y sobreyectiva se dice que es BIYECTIVA.

La bisección entendida como la correspondencia uno a uno entre los elementos de dos conjuntos, pero en ambos sentidos, tanto de A hacia B como de B hacia A.

Definición: Dada una función $f: A \rightarrow B$ cualquiera, se dice que:

$$f \text{ es BIYECTIVA} \Leftrightarrow \begin{matrix} f \text{ es INYECTIVA} \\ f \text{ es SOBREYECTIVA} \end{matrix} \text{ y}$$

La característica más importante de las funciones BIYECTIVAS es la de tener inversa y ser esta función biyectiva también.

Función inversa

La función inversa de una función f es una función g que deshace la acción de f . En otras palabras, si aplicamos f a un valor x y luego aplicamos g al resultado, obtenemos x de nuevo.

Formalmente:

- La función g es la inversa de f si para todo x en el dominio de g , se cumple que:

$$g(f(x)) = x$$

- Si f tiene una inversa, se denota como f^{-1} .

No todas las funciones tienen una función inversa. Para que una función tenga una inversa, debe ser biyectiva, lo que significa que:

- Cada elemento del recorrido de f tiene una única preimagen en el dominio.
- No hay dos elementos distintos del dominio que tengan la misma imagen.

Ejemplos:

- Función $f(x)=x^2$: Esta función no tiene una inversa porque no es biyectiva. Dos valores distintos del dominio pueden tener la misma imagen (por ejemplo, $f(2)=f(-2)=4$).
- Función $f(x)=x+1$: Esta función sí tiene una inversa, qué es $g(x)=x-1$. Si aplicamos $f(x)=x+1$ y luego $g(x)=x-1$, obtenemos x .

Propiedades de la función inversa:

- La inversa de la inversa de una función es la función original.
- La composición de una función con su inversa es la función identidad.
- La derivada de la inversa de una función es el inverso de la derivada de la función original (en los puntos donde la derivada de la función original no sea cero).

Aplicaciones de la función inversa:

- Resolver ecuaciones.
- Encontrar la antiderivada de una función.
- Definir funciones a trozos.
- Modelar relaciones inversas en la vida real.

La función inversa es una herramienta matemática importante con diversas aplicaciones en diferentes áreas.

Definición

“Sea $f: A \longrightarrow B$ una función cualquiera. Entonces si f es BIYECTIVA una nueva función que denotaremos por $f^{-1}: B \longrightarrow A$ se denomina función inversa de f ”

Es decir, tomando la definición de función mediante pares ordenados se define la función f^{-1} inversa de f , siempre que ésta sea biyectiva, como aquella función formada por los pares ordenados tomados con sus componentes en orden inverso.

A saber:

$$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$$

Algunas relevantes propiedades de esta nueva función de la FUNCIÓN INVERSA son:

- a) $\text{dom } f = A = \text{Im } f^{-1}$
- b) $\text{Im } f = B = \text{dom } f^{-1}$
- c) f^{-1} es también biyectiva

Es decir, los dominios e imagen de función directa f y de su inversa f^{-1} asociada se intercambian y la nueva función también es biyectiva.

Los gráficos de f y f^{-1} tienen la peculiaridad de ser simétricos respecto a la recta $y = x$, de modo que todo par (x, y) de f se convierta en (y, x) de f^{-1} como es de esperar.

En el ejemplo que estábamos analizando vimos que la última versión de $f(x) = x^2$ que era biyectiva, tiene una función inversa asegurada $f(x) = \sqrt{x}$, cuyos gráficos son simétricos respecto a dicha recta bisectriz del I y III cuadrantes.

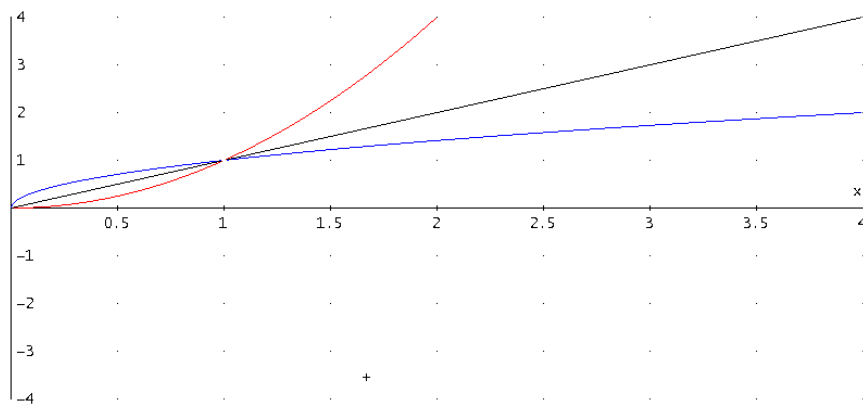


Figura 3. Función inyectiva y su inversa.

La función f y su inversa f^{-1} si existe, están íntimamente relacionadas de modo que se cumple:

- a) $x = f^{-1}(y)$ **sí y solo si** $y = f(x)$
- b) $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x, \quad \forall x \in \text{dom } f, \quad \forall x \in \text{dom } f^{-1}$

Para la determinación de la expresión analítica de la función inversa, basta:

- a) Analizar previamente si f es biyectiva (función uno a uno)
- b) Despejar “ x ” en función de “ y ” en la expresión de la función directa.
- c) Intercambiar las variables “ x ” por “ y ” y viceversa.
- d) Hallar el dominio de f^{-1} para verificar que debe ser igual a $\text{Im } f$.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 + 1$ definida de $\mathbb{R}_+$ en $[1, +\infty)$.

Se conoce que, en este dominio, es inyectiva, y, además, si imagen es igual al conjunto de llegada, luego sobreyectiva, por tanto, biyectiva, luego tiene inversa.

Como $y = x^2 + 1$ despejando “x” tenemos: $x = \sqrt{y - 1} = f^{-1}(x)$, por tanto, intercambiando las variables tenemos finalmente: $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$.

Nótese que el $\text{dom } f^{-1} = [1, +\infty) = \text{Im } f$.

Veamos las gráficas de ambas:

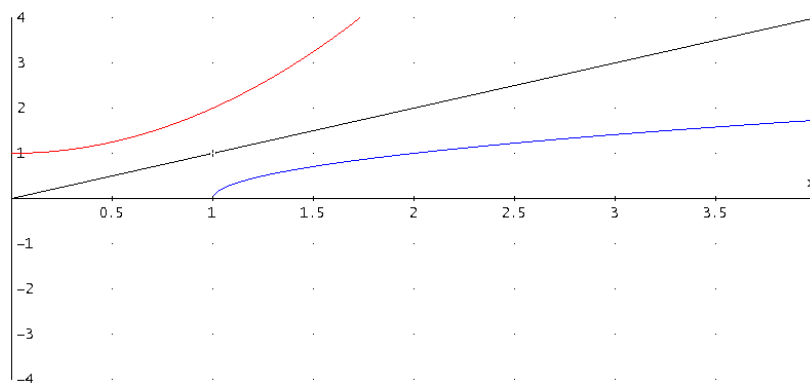


Figura 4. Función e inversa.

Obsérvese que las gráficas de ambas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Periodicidad

Definición:

“Se dice que una función f es periódica en cierto intervalo I , con período $T \neq 0$, sí y sólo sí $f(x + kT) = f(x)$, para todo x del intervalo I con $x + kT$ perteneciente a I , siendo k un entero cualquiera”.

- El ejemplo más elocuente de funciones periódicas lo constituyen las funciones trigonométricas.
- Si una función es periódica con período T , cualquier múltiplo de T , también es período de dicha función.

- El gráfico de las funciones periódicas se repite idénticamente en cada intervalo de amplitud T .

Ejemplo:

- 1) Representar gráficamente $y = \sin x$

Del nivel precedente se conoce perfectamente por el lector la gráfica de esta función en cualquier intervalo. Observe cómo se repite el gráfico en cada intervalo de amplitud 2π .

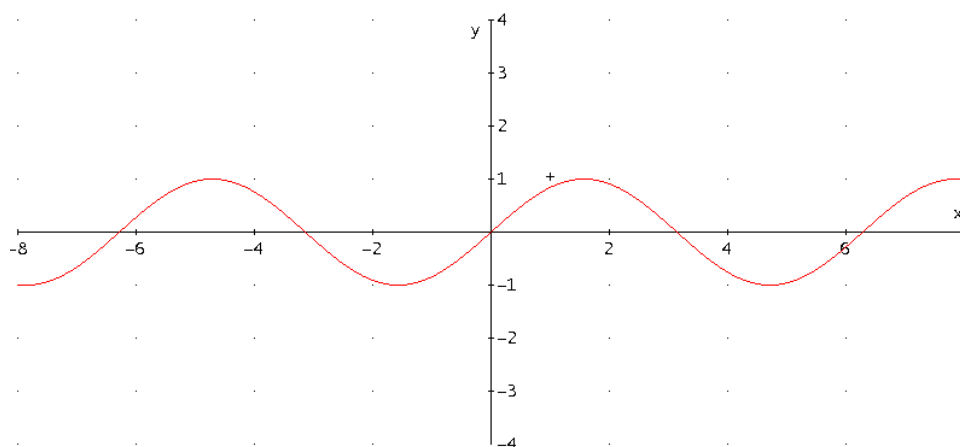


Figura 5. $y = \sin x$

- 2) Representar la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{tal que } f(x+2k) = f(x) \text{ para todo } k \text{ entero.}$$

Se trata de una función periódica con $T = 2$ definida por tramos.

Cuando estudiemos “Límite y Continuidad de funciones”, veremos que a este tipo de funciones se les da el nombre de seccionalmente continuas en algún intervalo. Este concepto será definido rigurosamente entonces.

Gráfica de la función f definida por tramos como se describe arriba y periódica $T = 2$.

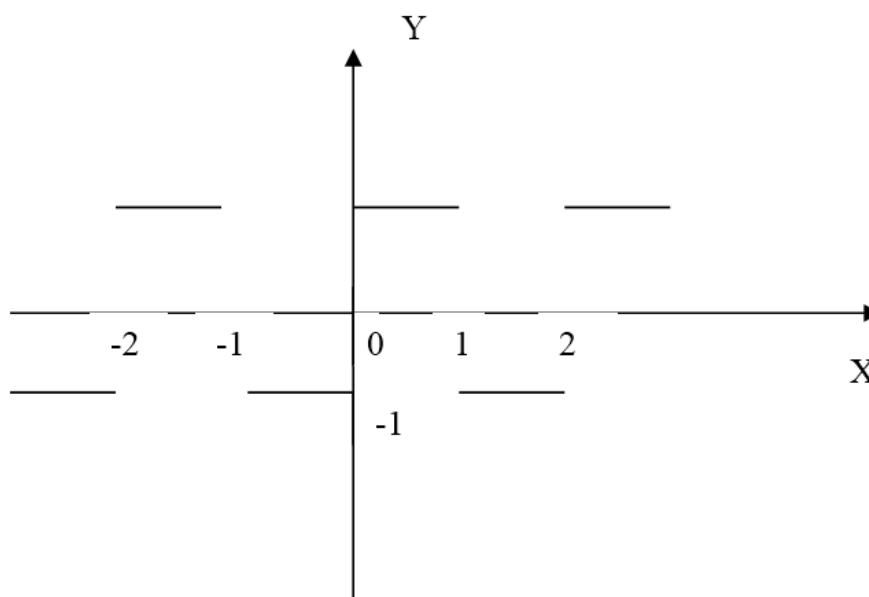


Figura 6. Gráfica de la función f definida por tramos y periódica $T=2$.

Operaciones con funciones

Las operaciones con funciones son operaciones matemáticas que se realizan entre dos o más funciones para obtener una nueva función. Las operaciones más comunes son:

1. Suma:

La suma de dos funciones f y g se define como la función $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ para todo x en el dominio común de f y g .

2. Resta:

La resta de dos funciones f y g se define como la función $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ para todo x en el dominio común de f y g .

3. Multiplicación:

La multiplicación de dos funciones f y g se define como la función $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$ para todo x en el dominio común de f y g .

4. División:

La división de dos funciones f y g se define como la función $(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ para todo x en el dominio común de f y g , donde $g(x) \neq 0$.

Propiedades:

- Las operaciones con funciones son conmutativas y asociativas.
- La distributiva se cumple para la suma y la multiplicación.
- La división no es conmutativa ni asociativa.

Ejemplos:

- Suma: Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+1$, entonces $(f+g)(x)=x^2+x+1$.
- Resta: Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+1$, entonces $(f-g)(x)=x^2-x-1$.
- Multiplicación: Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+1$, entonces $(f \cdot g)(x)=x^3+x^2$.
- División: Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+1$, entonces $(f/g)(x)=x-1$, siempre que $x \neq -1$.

Aplicaciones:

Las operaciones con funciones se utilizan en diversas áreas de la matemática y la ciencia, como:

- Análisis matemático
- Álgebra
- Física
- Ingeniería
- Economía

Las operaciones con funciones son una herramienta matemática importante con diversas aplicaciones en diferentes áreas.

Sean f y g dos funciones reales de una variable real. Se define:

- a) función suma como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- b) función producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- c) función cociente: $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$ siempre que $g(x) \neq 0$.

Entre todas las operaciones entre funciones, la composición tiene un rol protagónico predominante.

Definición

Sean f y g dos funciones tales que $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow E$, de tal modo que cada x de A tiene una imagen $f(x)$ en B tal que está en el dominio de C , es decir, de modo tal que: $\text{Im } f \cap \text{dom } g \neq \emptyset$.

Entonces se define la compuesta de g con f de la siguiente forma:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

En la práctica es bien sencillo determinar la expresión de la compuesta de dos funciones teniendo en cuenta la definición dada arriba. La primera función que se aplica es la

segunda que se escribe llamada función interna y la otra que es la primera que se escribe es la última que se aplica, y se llama externa.

Acerca del dominio de la función compuesta.

La forma más sencilla de determinar el dominio de una compuesta es aplicando el siguiente recurso:

$$\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}f \cap \text{dom}(g \circ f),$$

donde se concluye que es el conjunto intersección del dominio de la interna con el dominio de la expresión analítica que representa a la función compuesta.

Si se tratara de tres funciones f, g, h entonces: $(f \circ g \circ h)(x) = f\{g[h(x)]\}$, en este caso nótese que la primera en aplicarse es “h” ésta es la interna, “g” es la segunda en aplicarse, es la intermedia y f que es la primera que aparece en la expresión es la última en aplicarse y es la externa.

Por reiteración, se pueden componer cualquier cantidad de funciones.

Los interesados pueden adquirir habilidades manipulativas en tal sentido, proponiendo la tarea de componer varias funciones entre sí. (consultar SPIVAK, tomo I).

También es una tarea interesante la composición de una función consigo misma.

¡¡¡¡¡INTÉNTELO!!!!

Ejemplo

Dadas las funciones. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

$$g(x) = \text{sen } 2x.$$

Determinar las expresiones para: a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

Solución:

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\text{sen}2x] = (\text{sen}2x)^3 + 2(\text{sen}2x) + 1$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^3 + 2x + 1] = \text{sen}2(x^3 + 2x + 1)$$

Nótese que en todos estos dos casos es fácil comprender que el dominio de esas funciones compuestas es todo $\mathbb{R}$.

Es fácil apreciar, que la composición de funciones NO ES CONMUTATIVA.

Sin embargo, se puede comprobar que sí es ASOCIATIVA, por tanto, se cumple que:

$$[f \circ (g \circ h)](x) = [(f \circ g) \circ h](x)$$

Ya habíamos planteado que la compuesta de una función f (biyectiva) con su inversa f^{-1} es igual al argumento de dicha función, es decir, se cumple que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Conclusiones del capítulo

La Teoría de las Funciones es fundamental en matemáticas, proporcionando herramientas y conceptos esenciales para comprender y analizar diversos fenómenos y estructuras en el mundo real y abstracto.

A través del estudio de las funciones, podemos entender mejor la relación entre diferentes variables y cómo cambian entre sí, lo que es crucial en campos como la física, la economía, la ingeniería y muchas otras disciplinas.

Las funciones pueden ser clasificadas de diversas maneras, como funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otras, cada una con propiedades únicas que las hacen relevantes en contextos específicos.

La comprensión de conceptos básicos como dominio, rango, continuidad y límites es esencial para analizar el comportamiento de las funciones y resolver problemas relacionados con ellas.

La Teoría de las Funciones también incluye herramientas como la composición de funciones, las funciones inversas y la resolución de ecuaciones y desigualdades, que son cruciales para la modelización y resolución de problemas prácticos.

A medida que se avanza en el estudio de las funciones, se encuentran con conceptos más avanzados como la derivación e integración, que proporcionan una comprensión más profunda del comportamiento de las funciones y sus aplicaciones en el mundo real.

La Teoría de las Funciones es un campo en constante evolución, con nuevas aplicaciones y desarrollos teóricos que surgen continuamente, lo que lo convierte en un área emocionante y rica en posibilidades para la investigación y la aplicación práctica.

Capítulo II.- Estudio de funciones de una variable real.

El estudio de funciones de una variable real es una rama fundamental de las matemáticas con un largo y rico historial. Las investigaciones en esta área han contribuido significativamente a nuestro conocimiento sobre el comportamiento de las funciones, sus propiedades y aplicaciones.

Avances recientes:

- **Teoría de la aproximación:** Se han desarrollado técnicas avanzadas para aproximar funciones con polinomios, series de Fourier, fracciones continuas y otras formas.
- **Análisis complejo:** Se ha utilizado el análisis complejo para estudiar el comportamiento de las funciones en el plano complejo, lo que ha permitido obtener resultados más profundos sobre la convergencia de series, la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales y la ubicación de ceros y polos.
- **Análisis no lineal:** Se han desarrollado herramientas para estudiar el comportamiento de las funciones no lineales, como las funciones caóticas y fractales.
- **Aplicaciones en diversas áreas:** El estudio de funciones de una variable real tiene aplicaciones en una amplia gama de áreas, como la física, la ingeniería, la economía, la biología y las finanzas.

Desafíos y oportunidades:

- **Desarrollo de nuevas técnicas:** Existe una necesidad continua de desarrollar nuevas técnicas para estudiar el comportamiento de las funciones, especialmente las funciones no lineales y las funciones con múltiples variables.
- **Aplicaciones en nuevas áreas:** Se necesitan nuevas investigaciones para explorar las aplicaciones del estudio de funciones de una variable real en nuevas áreas, como la ciencia de datos y el aprendizaje automático.
- **Enseñanza y aprendizaje:** Se necesitan nuevas estrategias para enseñar y aprender sobre el estudio de funciones de una variable real de una manera más efectiva y atractiva.

Función polinomial

Una función polinomial es una función de la forma:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

donde:

- n es un número entero no negativo que se llama el grado de la función.
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son números reales que se llaman los coeficientes de la función.
- x es la variable independiente.

Ejemplos:

- $f(x)=2x^2+3x-1$ es una función polinomial de grado 2.
- $g(x)=x^3$ es una función polinomial de grado 3.
- $h(x)=5$ es una función polinomial de grado 0 (una constante).

Propiedades:

- La gráfica de una función polinomial es una curva suave.
- La derivada de una función polinomial es una función polinomial de grado uno menos.
- La integral de una función polinomial es una función polinomial de grado uno más.

Aplicaciones:

Las funciones polinomiales se utilizan en una amplia gama de aplicaciones, como:

- Modelado de fenómenos físicos
- Aproximación de funciones
- Resolución de ecuaciones
- Interpolación y extrapolación de datos

Las funciones polinomiales son una herramienta matemática importante con diversas aplicaciones en diferentes áreas.

Definición

La función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ se denominada función polinomial de n -ésimo grado. También se hará referencia a $P(x)$ como un polinomio de grado n . Los números a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 se llaman coeficientes del polinomio y pueden ser reales o complejos. El dominio de la función puede ser el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos.

Al igual que vimos con las funciones lineales y cuadráticas que no son más que casos particulares de la función polinomial, las soluciones de la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ las llamamos **raíces de la función P , o CEROS DE LA Función Polinomial**. Si los coeficientes de la función son reales y la raíz también, tendríamos un intercepto con el eje x de la gráfica de la función.

Ejemplo

Consideremos las funciones: $P(x) = x^3 - 8$; $H(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ y $Q(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

La función P es una función polinomial de grado 3. H y Q no son polinomiales.

La función $Q(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ no es polinomial pues la cancelación del factor $x+2$ no es válida para $x = -2$.

En cuanto a sus dominios:

Dominio de $P = \mathbb{R}$

Dominio de $H = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}$

Dominio de $Q = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$

Las raíces de la función P vienen dadas por:

$$x^3 - 8 = 0$$

Factorizando: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$$x = 2 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

y su intercepto con eje x es $x = 2$ que es la única raíz real. Para calcular el intercepto con el eje y basta con evaluar el polinomio en cero, por lo que sería $y = -8$.

Operaciones con funciones polinómicas

Las operaciones entre polinomios se realizan de manera muy sencilla y es objeto de estudio en los cursos de álgebra elemental en la enseñanza media.

A modo de recordatorio, hallaremos la suma, diferencia, producto y cociente de dos polinomios.

Sean

$$P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 \quad \text{y} \quad Q(x) = 3x^2 - x + 4$$

Halleemos:

a) $P + Q$

b) $P - Q$

c) $P \cdot Q$

d) P/Q

Solución:

a) $(P+Q)(x) = 6x^3 - 8x^2 + 11x - 13$

b) $(P-Q)(x) = 6x^3 - 14x^2 + 13x - 21$

c) $(P \cdot Q)(x) = (6x^3 - 11x^2 + 12x - 17)(3x^2 - x + 4)$

$$= 18x^5 - 6x^4 + 24x^3 - 33x^4 + 11x^3 - 44x^2 + 36x^3 - 12x^2 + 48x - 51x^2 + 17x - 68$$

$$= 18x^5 - 39x^4 + 71x^3 - 107x^2 + 65x - 68.$$

d)

$$\begin{array}{rcll} \text{Dividendo} & \longrightarrow & 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 & \Big| \quad 3x^2 - x + 4 \quad \longleftarrow \text{Divisor} \\ & & \underline{6x^3 - 2x^2 + 8x} & \quad \quad \quad 2x - 3 \quad \longleftarrow \text{Cociente} \\ & & -9x^2 + 4x - 17 & \\ & & \underline{-9x^2 + 3x - 12} & \\ & & x - 5 & \longleftarrow \text{Resto} \end{array}$$

Luego podemos concluir que:

$$6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 = (3x^2 - x + 4)(2x - 3) + x - 5$$

De donde podemos ver que dividir un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $B(x)$ cuyo grado sea menor o igual que el de $P(x)$, es hallar otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplan las siguientes condiciones:

1. $P(x) = B(x).C(x) + R(x)$.
2. Grado de $R(x)$ menor que el grado de $B(x)$.

El polinomio $P(x)$ se llama dividendo, $B(x)$ el divisor, $C(x)$ cociente y $R(x)$ el resto. Cuando el resto es cero se dice que la división es exacta y se tiene que $P(x) = B(x).C(x)$.

División sintética (Regla de Ruffini, también con esta denominación)

Especial atención merece la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$ o sea $P(x) = B(x)(x - a) + R(x)$ donde $R(x)$ será un polinomio de grado cero. En este caso el proceso se simplifica porque se puede omitir la escritura de la parte literal de todos los términos, limitándose a escribir los coeficientes en forma ordenada. El proceso entonces se denomina división sintética.

Ejemplo:

Determine el cociente y el resto que se obtiene al dividir:

1. $4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 1$ por $x - 5$.
2. $5x^4 - 2x^2 - 3$ por $x - 1$.

Solución:

1.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 2 & -6 & -5 & 1 \\ 5 & & 20 & 110 & 520 & 2575 \\ \hline & 4 & 22 & 104 & 515 & 2576 \end{array}$$

Donde $Q(x) = 4x^3 + 22x^2 + 104x + 515$ y $R(x) = 2576$.

2.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & & 5 & 5 & 3 & 3 \\ \hline & 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

De donde $Q(x) = 5x^3 + 5x^2 + 3x + 3$ y $R(x) = 0$.

La división sintética es un recurso muy interesante para evaluar polinomios. Es resultado se llama teorema del residuo:

Teorema del resto

El Teorema del Resto es un teorema fundamental en el estudio de las funciones polinomiales. El teorema establece que el resto de la división de un polinomio $p(x)$ por un binomio de la forma $(x-a)$ es igual al valor de $p(x)$ evaluado en $x=a$.

Formalmente:

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n y a es un número real, entonces el resto R de la división de $p(x)$ por $(x-a)$ es:

$$R=p(a)$$

En otras palabras:

Cuando dividimos $p(x)$ por $(x-a)$, el resto es el valor que obtenemos al sustituir x por a en $p(x)$.

Ejemplo:

Si $p(x)=x^2+3x-1$ y $a=2$, entonces el resto de la división de $p(x)$ por $(x-2)$ es:

$$R=p(2)=2^2+3\cdot 2-1=9$$

Aplicaciones:

El Teorema del Resto tiene diversas aplicaciones, como:

- Encontrar el valor de una función polinomial para un valor dado de la variable.
- Factorizar polinomios.
- Encontrar las raíces de un polinomio.
- Aproximar funciones.

El Teorema del Resto es una herramienta matemática importante con diversas aplicaciones en el estudio de las funciones polinomiales.

Si R es el resto después de dividir el polinomio $P(x)$ entre $x - a$, entonces $P(a) = R$.

La demostración es muy sencilla. Si $Q(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ entre $(x-a)$ y R es el residuo, se tiene que:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

Como esta igualdad es cierta para todo valor de x tendrá que cumplirse para $x = a$. Haciendo $x = a$ en toda la ecuación se tiene:

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R$$

$$P(a) = R$$

lo que demuestra el teorema.

Ejemplo

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$. El valor de $P(2)$ puede obtenerse hallando el resto de la división por $x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -2 & 8 \\ -2 & & -2 & 10 & -16 \\ \hline & 1 & -5 & 8 & -8 \end{array}$$

Así que $P(2) = -8$

Esta forma de evaluar el polinomio es mucho más económica en cuanto a la cantidad de operaciones aritméticas que se necesitan.

Graficación de funciones polinómicas

Para obtener la gráfica de una función polinómica podemos usar el método estudiado y para obtener los puntos podemos calcularlos haciendo uso de la división sintética. Sin embargo, resulta muy útil tener en cuenta las siguientes características de las funciones polinómicas:

- En la función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ para valores de x muy grandes en valor absoluto, es decir, muy alejados del origen, el término principal: $a_n x^n$ predomina ampliamente por sobre los demás. Nótese que, si a_n es positivo, entonces este término tiende a infinito a medida que x tiende a infinito. Cuando x tiende a menos infinito, el comportamiento depende de si n es par o impar. Si n es impar, el polinomio tiende a menos infinito, pero si n es para el polinomio tiende a infinito. Claro que si a_n es negativo, todo esto cambia. No hay que memorizar esta regla, en cada caso debe razonarse.
- La gráfica de la función es continua (sin saltos) y suave (sin picos). (Esto se demuestra en Cálculo Diferencial)
- Como consecuencia de lo anterior, cuando el grado del polinomio es impar, como va de menos infinito a más infinito o viceversa, y no tiene saltos, tiene obligatoriamente que cortar al eje x . Es decir, que los polinomios de grado impar poseen por lo menos una raíz real (intercepto con el eje x).
- La gráfica puede cortar al eje x , a lo más, en n puntos (grado del polinomio).
- La gráfica puede tener, a lo más, $n - 1$ puntos de tangente horizontal (se llaman puntos estacionarios). (Esto se demostrará en Cálculo Diferencial).

Ejemplo

Graficar la siguiente función: $g(x) = x^3 - 5x$

Solución:

Antes de evaluar puntos, se puede analizar que:

- Cuando x tiende a $-\infty$ el término predominante tiende a $-\infty$.
- Para x tendiendo a infinito este término tiende a infinito.
- La gráfica tiene que cortar al eje x en al menos un punto.
- Los interceptos con el eje x en este caso se pueden calcular fácilmente:

$$x^3 - 5x = 0$$

Esto es: $x(x^2 - 5) = 0$

Intercepto: $x = 0, x = \sqrt{5}, x = -\sqrt{5}$

- La gráfica no puede tener más de dos puntos estacionarios.
- El intercepto con el eje y es $y = 0$
- La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas ya que:

$$g(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -g(x)$$

En este caso, con los datos hallados no es necesario evaluar en ningún otro punto para tener una gráfica bastante aproximada. Si se quiere un poco más de precisión, se puede evaluar en dos puntos intermedios entre los interceptos, por ejemplo, en $x = 1$ y $x = 2$.

$$P(1) = -4; \quad P(2) = -2$$

La gráfica es:

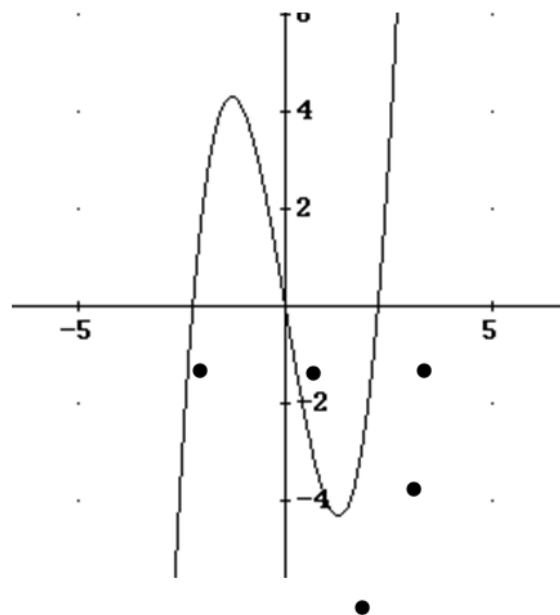


Figura 7. Gráfica evaluada en dos puntos intermedios entre los interceptos.

Raíces de un polinomio

Las raíces de un polinomio son los valores de la variable que hacen que el polinomio valga cero. En otras palabras, son las soluciones de la ecuación polinomial:

$$p(x)=0$$

donde $p(x)$ es el polinomio.

Formalmente:

- Raíz de un polinomio $p(x)$: Un número real a es una raíz de $p(x)$ si y solo si $p(a)=0$.
- Multiplicidad de una raíz: Si a es una raíz de $p(x)$ y $p(x)$ se puede escribir como:

$$p(x)=(x-a)^k q(x)$$

donde k es un número entero positivo y $q(x)$ no tiene a como raíz, entonces se dice que a es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad k .

Ejemplos:

- Polinomio $p(x)=x^2-4x+3$: Las raíces de este polinomio son 1 y 3, ambas de multiplicidad 1.
- Polinomio $p(x)=x^3-2x^2+x-2$: Las raíces de este polinomio son 1, 2 y -1. La raíz 1 tiene multiplicidad 2, mientras que las raíces 2 y -1 tienen multiplicidad 1.

Propiedades:

- Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces.
- Si un número complejo a es una raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces su complejo conjugado $\bar{a}$ también es una raíz del mismo polinomio.

Aplicaciones:

Las raíces de un polinomio tienen diversas aplicaciones, como:

- Factorizar el polinomio.
- Encontrar las intersecciones de la gráfica del polinomio con el eje x .
- Resolver ecuaciones polinomiales.
- Aproximar funciones.

Las raíces de un polinomio son una información importante que nos permite comprender mejor el comportamiento del polinomio y sus aplicaciones.

El cálculo de las raíces de un polinomio es un importante problema que se presenta con gran frecuencia. El problema puede ser muy complicado pero los teoremas que siguen permiten a veces obtener información sin un gran esfuerzo.

Teorema de factorización

El Teorema de Factorización, también conocido como Teorema Fundamental del Álgebra, es un teorema fundamental en el estudio de los polinomios. El teorema establece que todo polinomio con coeficientes reales o complejos de grado mayor que 0 tiene al menos una raíz en el conjunto de los números complejos.

Enunciado formal:

Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes reales o complejos, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en el conjunto de los números complejos.

En otras palabras:

Cualquier polinomio no constante con coeficientes reales o complejos puede ser factorizado como un producto de binomios de la forma $(x - a)$, donde a es una raíz del polinomio.

Ejemplos:

- Polinomio $p(x) = x^2 - 4x + 3$: Este polinomio tiene dos raíces, 1 y 3, ambas reales. Por lo tanto, se puede factorizar como:

$$p(x) = (x - 1)(x - 3)$$

- Polinomio $p(x) = x^2 + 4x + 4$: Este polinomio no tiene raíces reales, pero sí tiene dos raíces complejas, $-2 \pm 2i$. Por lo tanto, se puede factorizar como:

$$p(x) = (x + 2 - 2i)(x + 2 + 2i)$$

Consecuencias:

- El Teorema de Factorización implica que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene n raíces (contando con su multiplicidad).
- El teorema también permite encontrar las raíces de un polinomio utilizando métodos numéricos.

Aplicaciones:

El Teorema de Factorización tiene diversas aplicaciones, como:

- Encontrar las intersecciones de la gráfica del polinomio con el eje x .

- Resolver ecuaciones polinomiales.
- Aproximar funciones.
- Demostrar otros teoremas matemáticos.

El Teorema de Factorización es un teorema fundamental en el estudio de los polinomios con diversas aplicaciones en matemáticas y otras áreas.

Si r es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $x - r$ es un factor de $P(x)$. Por el contrario, si $x - r$ es un factor de $P(x)$, entonces r es una raíz de $P(x)$.

El teorema de la factorización es un procedimiento directo para comprobar si $(x - r)$ forma parte de la descomposición factorial de un cierto polinomio. El teorema no dice, sin embargo, como obtener valores adecuados de r . Más adelante se obtendrán algunas reglas sencillas.

Teorema fundamental del álgebra

En el estudio que hemos hecho hasta el momento de los polinomios hemos visto que los de primer grado siempre tienen una raíz y los de segundo grado también tienen raíces. La generalización de este hecho no es trivial y fue demostrada por Gauss en 1797 como parte de su tesis de graduado (con solo 20 años). La demostración no la realizaremos, pero pudiera consultarse en libros de Álgebra Superior.

Teorema (polinomios con coeficientes complejos en general)

El Teorema del Álgebra, también conocido como Teorema Fundamental del Álgebra, es un teorema fundamental en el estudio de los polinomios. El teorema establece que todo polinomio con coeficientes complejos de grado mayor que 0 tiene al menos una raíz en el conjunto de los números complejos.

Enunciado formal:

Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en el conjunto de los números complejos.

En otras palabras:

Cualquier polinomio no constante con coeficientes complejos puede ser factorizado como un producto de binomios de la forma $(x - a)$, donde a es una raíz del polinomio.

Ejemplos:

- Polinomio $p(x)=x^2-4x+3$: Este polinomio tiene dos raíces, 1 y 3, ambas reales. Por lo tanto, se puede factorizar como:

$$p(x)=(x-1)(x-3)$$

- Polinomio $p(x)=x^2+4x+4$: Este polinomio no tiene raíces reales, pero sí tiene dos raíces complejas, $-2\pm 2i$. Por lo tanto, se puede factorizar como:

$$p(x)=(x+2-2i)(x+2+2i)$$

Consecuencias:

- El Teorema del Álgebra implica que todo polinomio de grado $n>0$ tiene n raíces (contando con su multiplicidad).
- El teorema también permite encontrar las raíces de un polinomio utilizando métodos numéricos.

Aplicaciones:

El Teorema del Álgebra tiene diversas aplicaciones, como:

- Encontrar las intersecciones de la gráfica del polinomio con el eje x .
- Resolver ecuaciones polinomiales.
- Aproximar funciones.
- Demostrar otros teoremas matemáticos.

El Teorema del Álgebra es un teorema fundamental en el estudio de los polinomios con diversas aplicaciones en matemáticas y otras áreas.

Toda ecuación algebraica con coeficientes complejos $P(x) = 0$ tiene exactamente “ n ” raíces complejas (no necesariamente desiguales)

- Si el polinomio tiene m raíces iguales a r entonces r se denomina raíz de multiplicidad m y por tanto en su descomposición factorial aparece el factor $(x-r)^m$.

Este importante resultado constituye uno de los mayores logros de la investigación algebraica.

Polinomios con coeficientes reales

Un polinomio con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

donde:

- n es un número entero no negativo que se llama el grado de la función.
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ son números reales que se llaman los coeficientes de la función.
- x es la variable independiente.

Ejemplos:

- $f(x)=2x^2+3x-1$ es un polinomio con coeficientes reales de grado 2.
- $g(x)=x^3$ es un polinomio con coeficientes reales de grado 3.
- $h(x)=5$ es un polinomio con coeficientes reales de grado 0 (una constante).

Propiedades:

- La gráfica de un polinomio con coeficientes reales es una curva suave.
- La derivada de un polinomio con coeficientes reales es un polinomio con coeficientes reales.
- La integral de un polinomio con coeficientes reales es un polinomio con coeficientes reales.
- Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja, entonces su conjugado complejo también es una raíz del polinomio.

Aplicaciones:

Los polinomios con coeficientes reales tienen diversas aplicaciones, como:

- Modelado de fenómenos físicos
- Aproximación de funciones
- Resolución de ecuaciones
- Interpolación y extrapolación de datos

Los polinomios con coeficientes reales son una herramienta matemática importante con diversas aplicaciones en diferentes áreas.

En los casos que veremos en este texto y en la mayor parte de las aplicaciones, los coeficientes de los polinomios son números reales. En este importante caso se cumple el siguiente teorema que veremos sin demostración.

Teorema

Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja su conjugado también es una raíz del polinomio.

- El hecho de que, en los polinomios con coeficientes reales, las raíces complejas aparecen por pares tiene muchas consecuencias interesantes. Una de ellas es:

Corolario del teorema fundamental del Álgebra

Toda ecuación algebraica con coeficientes reales de grado impar, $P(x) = 0$, tiene obligatoriamente, al menos una raíz real.

Nota: El estudio de un teorema para el caso de coeficientes enteros (raíces racionales) lo dejamos como lectura opcional.

Función racional

Una función racional es una función de la forma:

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$$

donde:

- $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios
- $q(x) \neq 0$ para todo x en el dominio de la función

Ejemplos:

- $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ es una función racional.
- $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ es una función racional.
- $h(x) = x$ no es una función racional, ya que no es una expresión de la forma $\frac{q(x)}{p(x)}$.

Propiedades:

- La gráfica de una función racional puede tener discontinuidades en los puntos donde $q(x) = 0$.

- La derivada de una función racional es otra función racional.
- La integral de una función racional puede ser otra función racional o una función más compleja.

Aplicaciones:

Las funciones racionales tienen diversas aplicaciones, como:

- Modelado de fenómenos físicos
- Aproximación de funciones
- Resolución de ecuaciones
- Interpolación y extrapolación de datos

Las funciones racionales son una herramienta matemática importante con diversas aplicaciones en diferentes áreas.

Definición:

Se dice que $R(x)$ es una función racional si $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ es un polinomio cualquiera y $Q(x)$ es un polinomio que no sea el polinomio nulo. El dominio de R es el conjunto de todos los números reales tales que $Q(x) \neq 0$.

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1} \quad g(x) = \frac{x}{x^3 + 4x^2 - x + 4} \quad h(x) = (x + 3)^2 \quad p(x) = \frac{1}{x + 3}$$

- Se supone que, a menos que se advierta lo contrario, los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no poseen factores comunes, esto es, que no pueden ambos anularse para el mismo valor de x , pero teóricamente, esa posibilidad siempre existe. Por tanto, sólo consideraremos para este concepto fracciones IRREDUCIBLES.
- Caso particular: como el polinomio del denominador puede ser una constante (grado 0), todas las funciones polinomiales se pueden considerar como funciones racionales.

Comportamiento de la función en los ceros de $P(x)$ y $Q(x)$

Es bastante evidente que:

1. Si $Q(a) = 0$, (independientemente de que $P(a)$ sea o no cero) entonces a no pertenece al dominio de R , porque la división por cero no está permitida. Para $x = a$ no existe la función.
2. Si $P(a) = 0$ y $Q(a) \neq 0$, entonces $x = a$ es un cero de la función R . En el punto $x = a$ la gráfica de R corta al eje de las x .
3. Si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$, entonces la función R crece indefinidamente en valor absoluto cuando x se acerca hacia a . Puede crecer hacia valores grandes y positivos o hacia valores grandes negativos, o de formas diferentes a cada lado de $x = a$.

A estos valores que anulan el denominador sin que anulen simultáneamente el numerador de la función racional, se les denomina POLOS de la función racional.

Por tanto, los POLOS de una función racional, no pertenecen a su dominio.

Así podríamos formalizar diciendo que:

$$\text{dom}R = \mathbb{R} - \{\text{POLOS de } R\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$$

Ejemplo

Analizar el comportamiento de la función racional $f(x) = \frac{2}{x-1}$ en la vecindad de $x = 1$.

Solución:

- a) Para valores de x próximos a 1 pero mayores que 1, la función toma valores positivos que pueden sobrepasar a cualquier cantidad fijada de antemano tomando una x suficientemente próximo a 1. Esto se escribe:

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } x \rightarrow 1^+$$

- b) Para valores de x próximos a 1 pero inferiores a él, el denominador de la fracción es pequeño y negativo, así que $f(x)$ toma valores negativos de valor absoluto cada vez mayor a medida que x se aproxima hacia 1 por la izquierda. Esto se simboliza:

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } x \rightarrow 1^-$$

La figura muestra la gráfica de f en las proximidades de $x = 1$:

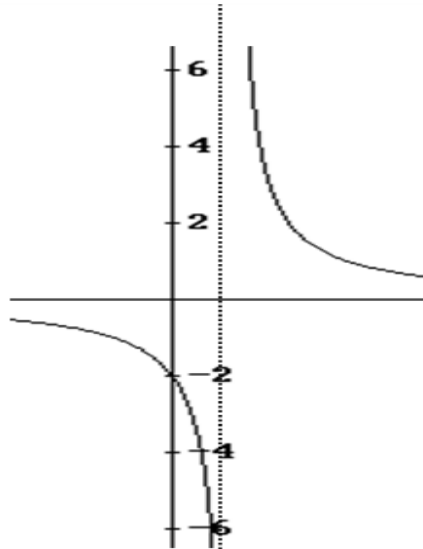


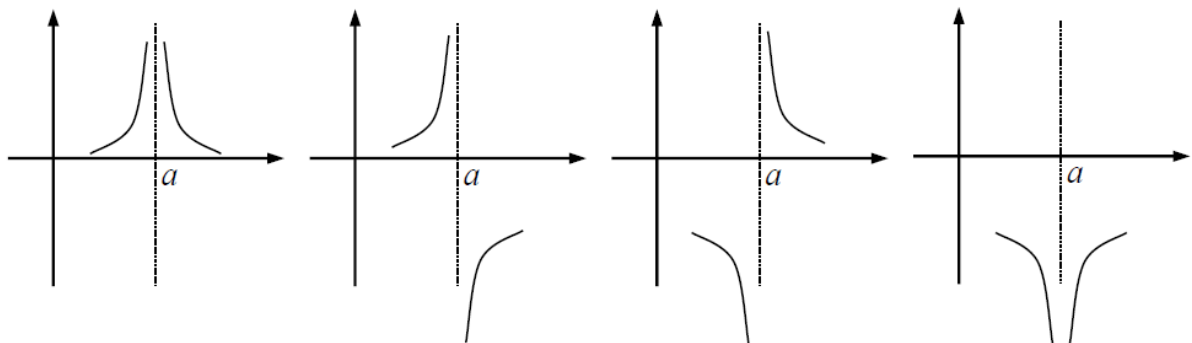
Figura 8. Gráfico en una vecindad.

Asíntotas verticales y asíntotas horizontales

Definición:

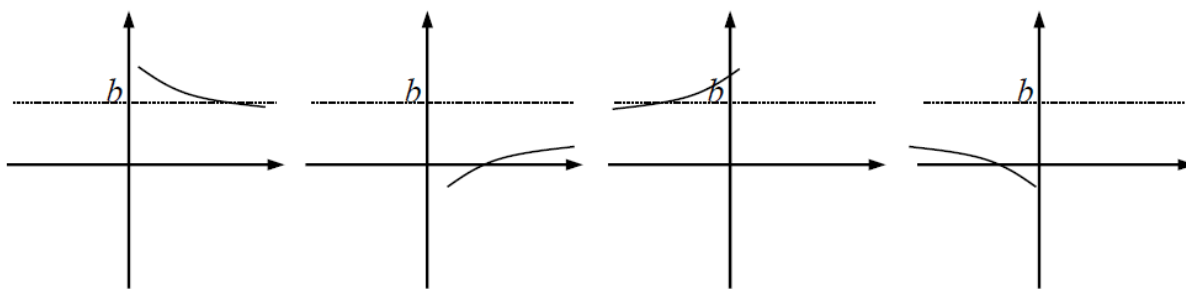
La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite cuando x se aproxima hacia a desde la derecha o desde la izquierda. De manera simbólica:

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{ó} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad \underset{1}{x \rightarrow a^+} \quad \text{ó} \quad x \rightarrow a^-$$



La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ se aproxima hacia b a medida que x aumenta sin límite o disminuye sin límite. De manera simbólica:

$$f(x) \rightarrow b \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{ó} \quad x \rightarrow -\infty$$



Las figuras muestran las posibles posiciones relativas entre la función y la asíntota.

- Destacar que una función puede poseer muchas asíntotas verticales, pero sólo una horizontal hacia la derecha y otra horizontal hacia la izquierda (que, por lo general, coinciden) ya que una función solo puede tomar un valor para cada x .

Graficación de funciones racionales

La gráfica de una función refleja todo nuestro conocimiento acerca de ella, de ahí la importancia de graficar una función. En el caso de las funciones racionales, los elementos más importantes a tomar en cuenta a la hora de construir su gráfica son:

- Las funciones racionales son continuas y suaves, salvo en los puntos donde se anula el denominador.
- Los interceptos con el eje x y el intercepto con el eje y .
- El dominio de la función (todos los reales excepto los ceros del denominador).
- Las asíntotas verticales (ceros del denominador que no anulan el numerador).
- El comportamiento asintótico de la función (términos predominantes del numerador y denominador).
- Esquema de signos de la función
- Simetría de la función.

En general, con estos elementos se puede trazar una gráfica bastante aproximada de la función racional. Si esto no fuera suficiente, se puede evaluar la función en algunos valores importantes de x .

Ejemplo:

Graficar la función:
$$p(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Solución:

Dominio = $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}$

Interceptos: (0, 0)

Simetría: $p(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = \frac{-x}{1-x^2} = -p(x)$. La gráfica es simétrica respecto al origen.

Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$

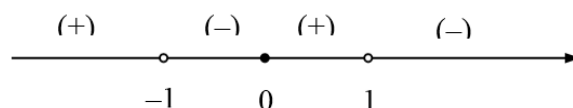
Comportamiento asintótico: Cuando $x \rightarrow \infty$, $p(x) \rightarrow 0$

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $p(x) \rightarrow 0$

Esquema de signos:

Ceros del numerador: $x = 0$

Ceros del denominador: $x = 1$ y $x = -1$



Con esta información se puede construir la gráfica a mano alzada. La que sigue se realizó en Derive:

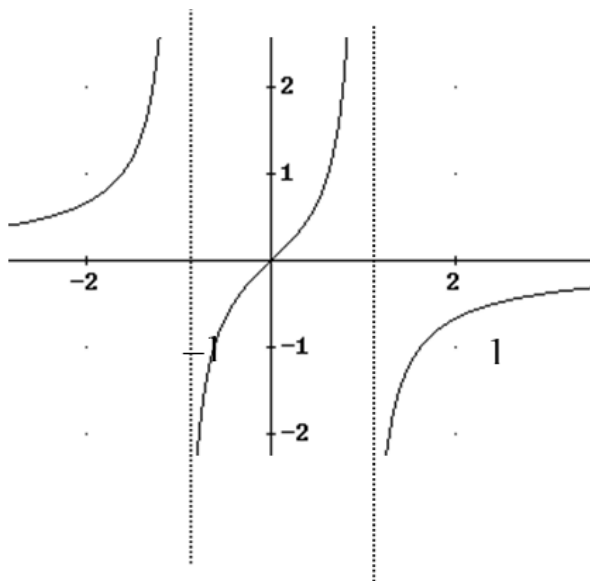


Figura 9. Gráfico en Derive.

Las funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son un tema fundamental en matemáticas con aplicaciones en diversas áreas. Su estudio ha experimentado un desarrollo significativo a lo largo de la historia, con avances en su comprensión teórica y aplicaciones prácticas.

Avances recientes:

- Demostraciones más robustas: Se han desarrollado demostraciones más sólidas de propiedades fundamentales de las funciones exponenciales, como la existencia del número e y la fórmula de Euler.
- Análisis más profundo: Se han realizado análisis más profundos del comportamiento de las funciones exponenciales, incluyendo su comportamiento asintótico y la existencia de puntos fijos.
- Aplicaciones en nuevas áreas: Se han encontrado nuevas aplicaciones de las funciones exponenciales en áreas como la biología, la economía y la física.

Aplicaciones:

- Modelado de crecimiento y decaimiento: Las funciones exponenciales se utilizan para modelar fenómenos de crecimiento y decaimiento, como el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva y la propagación de enfermedades.
- Cálculo de interés compuesto: Las funciones exponenciales se utilizan para calcular el interés compuesto en inversiones y préstamos.
- Resolución de ecuaciones diferenciales: Las funciones exponenciales son soluciones de muchas ecuaciones diferenciales importantes en física e ingeniería.

Software y herramientas:

- Existen diversos software y herramientas para trabajar con funciones exponenciales, como calculadoras, paquetes de software matemático y bibliotecas de código.

Desafíos:

- A pesar de los avances, aún existen desafíos en el estudio de las funciones exponenciales, como la comprensión completa de su comportamiento en el plano complejo.
- Se requiere un mayor desarrollo de métodos para aplicar las funciones exponenciales a problemas en áreas nuevas.

Antes de comenzar el estudio de estos tipos de funciones denominadas funciones trascendentes según vimos en el curso RASA cuando nos referimos a la clasificación de las ecuaciones matemáticas, es menester que el estudiante, haga un breve repaso a los aspectos relativos a función inversa y sus diferentes aspectos esenciales, que se

discutieron en la conferencia anterior No. 1, para que pueda comprender la relación entre las exponenciales y las logarítmicas como funciones trascendentes.

Definición:

Una función exponencial es una función del tipo $f(x) = b^x$, donde b es una constante positiva.

Las funciones exponenciales se evalúan muy fácilmente para valores enteros de x . Para valores racionales, utilizando algunos artificios algebraicos. Para valores irracionales, hallar su valor es muy difícil y se necesita recurrir a tablas, calculadoras y asistentes matemáticos. En cursos más avanzados se verán los métodos matemáticos que se requieren para estas evaluaciones.

Ejemplo

Consideremos la función exponencial de base 2: $f(x) = 2^x$. Hallemos $f(5)$, $f(-3)$ y $f(\frac{2}{3})$

Solución:

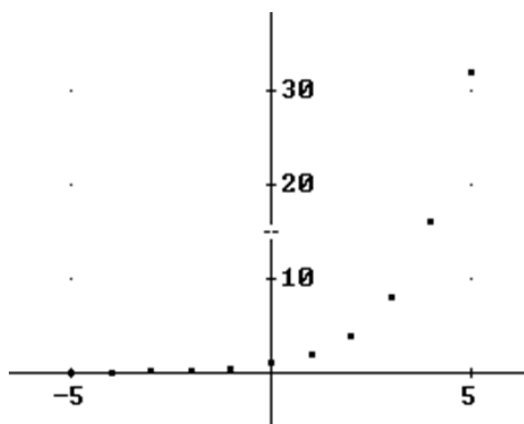
$$f(5) = 2^5 = (2)(2)(2)(2)(2) = 32$$

$$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$f(\frac{2}{3}) = 2^{2/3} = (2^2)^{1/3} = 4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.587401051$$

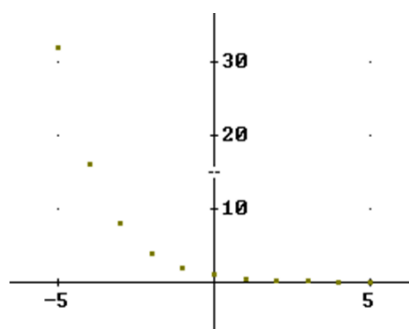
A continuación, se muestra una tabla construida para valores enteros de x entre -5 y 5 y se muestran en una gráfica los puntos correspondientes:

x	2^x
-5	0.03125
-4	0.0625
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



Ejemplo Para la exponencial $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ la tabla y la gráfica que resultan son:

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125



Como se ve, cuando la base es mayor que 1, la función exponencial es creciente, pero si es menor que 1, la función es decreciente y la gráfica lo muestra.

Propiedades de la función $f(x) = b^x$

Del análisis realizado hasta ahora se puede concluir que:

- 1 Como $b^0 = 1$, Todas las gráficas intersecan al eje vertical en $y = 1$, es decir, pasan por $(0,1)$
- 2 Todas las gráficas son continuas.
- 3 El eje x es una asíntota horizontal (hacia la izquierda si $b > 1$; hacia la derecha si $b < 1$) salvo el caso en que $b = 1$.
- 4 Si $b > 1$ la función es creciente.
- 5 Si $b < 1$ la función es decreciente.
- 6 Salvo el caso trivial en que $b = 1$, la función es uno a uno, es decir, inyectiva.

Propiedades algebraicas de la función exponencial

Las propiedades algebraicas de la función exponencial son un tema fundamental en matemáticas con aplicaciones en diversas áreas. Su estudio ha experimentado un desarrollo significativo a lo largo de la historia, con avances en su comprensión teórica y aplicaciones prácticas.

Avances recientes:

- Demostraciones más robustas: Se han desarrollado demostraciones más sólidas de propiedades fundamentales de las funciones exponenciales, como la existencia del número e y la fórmula de Euler.

- Análisis más profundo: Se han realizado análisis más profundos del comportamiento de las funciones exponenciales, incluyendo su comportamiento asintótico y la existencia de puntos fijos.
- Aplicaciones en nuevas áreas: Se han encontrado nuevas aplicaciones de las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales en áreas como la biología, la economía y la física.

Propiedades algebraicas:

- Identidad: $e^0=1$
- Inversa: $e^{-x}=e^{-1}x$
- Producto: $e^{x+y}=e^x \cdot e^y$
- Cociente: $e^y e^x = e^{x-y}$
- Potencia: $(e^x)^n = e^{nx}$
- Logaritmo: $e^{\ln(x)}=x$

Aplicaciones:

- Resolución de ecuaciones: Las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales se utilizan para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Modelado de fenómenos: Las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales se utilizan para modelar fenómenos de crecimiento y decaimiento, como el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva y la propagación de enfermedades.
- Cálculo de interés compuesto: Las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales se utilizan para calcular el interés compuesto en inversiones y préstamos.

Software y herramientas:

- Existen diversos software y herramientas para trabajar con funciones exponenciales, como calculadoras, paquetes de software matemático y bibliotecas de código.

Desafíos:

- A pesar de los avances, aún existen desafíos en el estudio de las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales, como la comprensión completa de su comportamiento en el plano complejo.
- Se requiere un mayor desarrollo de métodos para aplicar las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales a problemas en áreas nuevas.

Las propiedades algebraicas de las funciones exponenciales son una herramienta matemática poderosa con un estado del arte en constante evolución. Su estudio y aplicación se encuentran en expansión, con un futuro prometedor en diversas áreas.

Aquí hay algunos temas específicos que puedes explorar:

- Demostraciones de las propiedades algebraicas de la función exponencial: Puedes investigar las diferentes demostraciones que existen para cada propiedad, como la demostración de la identidad $e^0=1$ o la demostración de la fórmula de Euler.
- Aplicaciones de las propiedades algebraicas de la función exponencial en áreas específicas: Puedes investigar cómo se usan las propiedades algebraicas de la función exponencial en áreas como la biología, la economía o la física.
- Software y herramientas para trabajar con funciones exponenciales: Puedes explorar las diferentes opciones de software y herramientas disponibles para trabajar con funciones exponenciales, como calculadoras, paquetes de software matemático y bibliotecas de código.
- Desafíos en el estudio de las propiedades algebraicas de la función exponencial: Puedes investigar los desafíos que aún existen en el estudio de las propiedades algebraicas de la función exponencial, como la comprensión completa de su comportamiento en el plano complejo.

Algunas de las propiedades han sido objeto de estudios anteriores y se incluyen aquí a modo de recuerdo. Se supone siempre que las bases a y b son ambas positivas y diferentes de 1.

1. Leyes de los exponentes:

$a^x a^y = a^{x+y}$ Para multiplicar potencias de igual base, se suman los exponentes

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ Para dividir potencias de igual base, se restan los exponentes

$(a^x)^y = a^{xy}$ Para elevar una potencia a un exponente, se multiplican los exponentes

$(ab)^x = a^x b^x$ La potencia de un producto es el producto de las potencias.

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ La potencia de un cociente es el cociente de las potencias.

2. $a^x = a^y$ si y solo si $x = y$ La función exponencial es inyectiva

3 Para $x \neq 0$, entonces $a^x = b^x$ si y solo si $a = b$

4 Las exponenciales solo se cortan en $x = 0$

Aplicaciones de la función exponencial

La función exponencial aparece ligada a múltiples e importantes problemas. Algunos de ellos son:

- El crecimiento de una población de animales (incluso, hombres) cuando los recursos de subsistencia son ilimitados.
- La desintegración de materiales radiactivos.
- El enfriamiento o calentamiento de un cuerpo debido a su medio ambiente.
- La carga de un condensador está sometida a voltaje constante.
- La descarga de un condensador a través de una resistencia.
- La velocidad con que se propaga una enfermedad.
- La velocidad con que corre un rumor.

La razón de por qué esto sucede se verá en cursos posteriores, sobre todo en Matemática 3 cuando se estudien las ecuaciones diferenciales. Por el momento, es importante que el alumno pueda operar con estos modelos de manera adecuada.

Ejemplo

En algunas poblaciones el número de individuos crece en forma exponencial. Muchas veces se utiliza la función:

$$P(t) = P_0 2^{t/d}$$

Donde P : Número de individuos en el momento t

P_0 : Número de individuos en el momento inicial

d : Tiempo que tarda en duplicarse la población (tiempo de duplicación)

Por ejemplo, si Kenia tiene actualmente aproximadamente 30 millones de habitantes y el tiempo de duplicación es de 19 años, ¿qué población habrá dentro de 10 años si la tasa de crecimiento no cambia?

Solución:

Si P se mide en millones y t en años, la función adecuada es: $P(t) = 30 \cdot 2^{t/19}$, para $t = 10$ será:

$$P(10) = 30 \cdot 2^{10/19} = (30)(2)^{0.526} = (30)(1.4402) = 43.2 \text{ millones de habitantes}$$

El número e

Este importante número está asociado a tantos problemas teóricos y aplicados que, después de la constante $\pi = 3.1415926\dots$, es el número más importante de toda la Matemática. Esta constante fue descubierta por el matemático alemán Leibniz en 1690 (que la llamó b) y fue llamada e por Euler 37 años más tarde. Euler descubrió interesantes propiedades de este número y por eso muchos lo llaman, erróneamente, constante de Euler. La constante de Euler es otro número importante que se verá en el estudio de las series, en Matemática 3.

El número e está vinculado a la función $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ cuando m toma valores muy grandes.

Nótese que cuando m es muy grande, la base de la potencia se hace muy próxima a 1 pero a su vez el exponente crece, de modo que es difícil predecir qué sucede. Vamos a verlo experimentalmente. Construyamos una tabla de dicha función para valores de m más y más grandes. Vamos a hacerlo con Derive para ahorrarnos los cálculos. Usamos el comando:

VECTOR ([m,(1+1/m)^m],m,10,100,10)

m	$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$
10	2.593742460
20	2.653297705
30	2.674318775
40	2.685063838
50	2.691588029
60	2.695970139
70	2.699116370
80	2.701484940

90	2.703332461
100	2.704813829

Como se observa, la función se acerca cada vez más a un valor fijo al cual nunca llega. Desde el siglo XVII se probó que este valor fijo es, con 15 cifras exactas:

2,718281828459045...

y a ese número se le designó con la letra e inicial de la palabra “exponencial”.

El número e aparece en múltiples cuestiones teóricas y prácticas, pero nosotros lo vamos a emplear, en particular, como base de una función exponencial, la función:

$$f(x) = e^x$$

De todas las funciones exponenciales, está de base e es la más importante. Las razones se comprenderán en Cálculo Infinitesimal. Por esta razón, cuando las personas se refieren a la función exponencial, sin indicar la base, se sobreentiende que es la base exponencial de base e . Como e es mayor que 1, su gráfica es creciente y presenta todas las características ya vistas para las funciones exponenciales. A continuación, mostramos la gráfica construida en Derive:

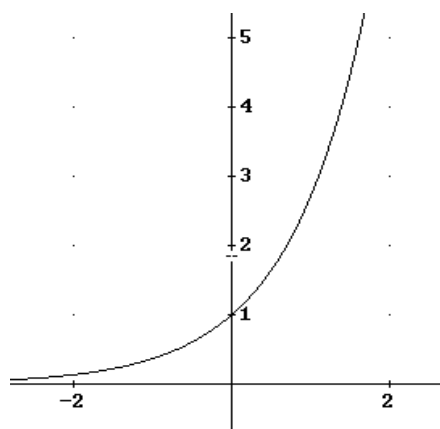


Figura 10. Gráfica construida en Derive.

Como se observa, es una función que crece con gran rapidez cuando x toma valores positivos y también decrece con gran rapidez a medida que x va tomando valores negativos alejados del origen.

Esta función aparece en todas las calculadoras científicas y en todos los lenguajes de programación, casi siempre designada como $\exp(x)$ y también está tabulada desde hace siglos con gran precisión.

EXPRESANDO b^x EN TÉRMINOS DE e^x

Observando la gráfica de e^x se nota que esta función toma todos los valores reales positivos. Como hemos supuesto que $b > 0$, siempre existirá un número, llamémosle k tal que

$$e^k = b$$

Observe que: si $b > 1$, entonces k es positivo

Si $b < 1$, entonces k es negativo

Ahora la función b^x la podemos escribir: $b^x = (e^k)^x = e^{kx}$. En la práctica, raras veces se emplean otras exponenciales que no sea la de base e .

La función logarítmica

La función logarítmica es una función inversa de la función exponencial. Tiene un papel fundamental en matemáticas y se aplica en diversas áreas. Su estudio ha experimentado un desarrollo significativo a lo largo de la historia, con avances en su comprensión teórica y aplicaciones prácticas.

Avances recientes:

- Demostraciones más robustas: Se han desarrollado demostraciones más sólidas de propiedades fundamentales de la función logarítmica, como la existencia del número e y la fórmula de cambio de base.
- Análisis más profundo: Se han realizado análisis más profundos del comportamiento de la función logarítmica, incluyendo su comportamiento asintótico y la existencia de puntos fijos.
- Aplicaciones en nuevas áreas: Se han encontrado nuevas aplicaciones de la función logarítmica en áreas como la biología, la economía y la física.

Propiedades:

- Definición: $y = \log_a(x)$ si y solo si $a^y = x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.
- Logaritmo natural: El logaritmo en base e se llama logaritmo natural y se denota como $\ln(x)$.
- Propiedades básicas:
 - $\log_a(1) = 0$
 - $\log_a(a) = 1$
 - $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

- $\log_a(yx) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(xn) = n\log_a(x)$
- Cambio de base: $\log_a(x) = \log_b(a)\log_b(x)$

Aplicaciones:

- Resolución de ecuaciones: La función logarítmica se utiliza para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Modelado de fenómenos: La función logarítmica se utiliza para modelar fenómenos de crecimiento y decaimiento con tasas de cambio proporcionales, como la escala de Richter para terremotos y la ley de Weber-Fechner en psicología.
- Cálculo de pH: La función logarítmica se utiliza para calcular el pH de una solución ácida o básica.

Software y herramientas:

- Existen diversos software y herramientas para trabajar con funciones logarítmicas, como calculadoras, paquetes de software matemático y bibliotecas de código.

Desafíos:

- A pesar de los avances, aún existen desafíos en el estudio de la función logarítmica, como la comprensión completa de su comportamiento en el plano complejo.
- Se requiere un mayor desarrollo de métodos para aplicar la función logarítmica a problemas en áreas nuevas.

La función logarítmica es una herramienta matemática poderosa con un estado del arte en constante evolución. Su estudio y aplicación se encuentran en expansión, con un futuro prometedor en diversas áreas.

Se puedes explorar:

- Demostraciones de las propiedades de la función logarítmica: Puedes investigar las diferentes demostraciones que existen para cada propiedad, como la demostración de la propiedad $\log_a(1)=0$ o la demostración de la fórmula de cambio de base.

- Aplicaciones de la función logarítmica en áreas específicas: Puedes investigar cómo se usa la función logarítmica en áreas como la biología, la economía o la física.
- Software y herramientas para trabajar.

Definición

Sea b un número positivo y diferente de 1. La función $\log_b x$ se define como la función inversa de b^x , es decir:

$$y = \log_b x \quad \text{equivale a} \quad x = b^y$$

En palabras: El logaritmo base b del número x es el exponente al que hay que elevar a b para obtener x .

Dominio, rango y gráfica de la función logarítmica

De la definición resulta claro que x solo podrá tomar valores positivos ya que b^y siempre es mayor que cero. El rango se verá más fácilmente al analizar la gráfica de la función. Como las funciones exponencial y logaritmo de base b son inversas, sus gráficas deben ser simétricas una a otra respecto a la bisectriz del primer cuadrante. La gráfica va a depender de si la base b es menor o mayor que 1. Veamos ambos casos:

Base b mayor que 1

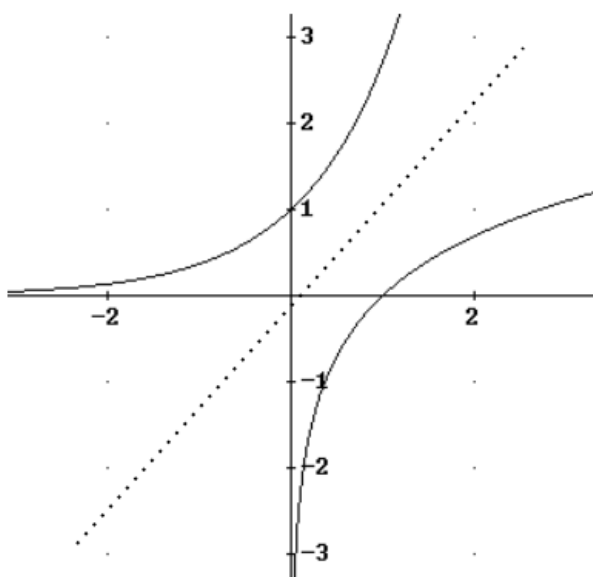


Figura 11. Base b mayor que 1.

Base b menor que 1

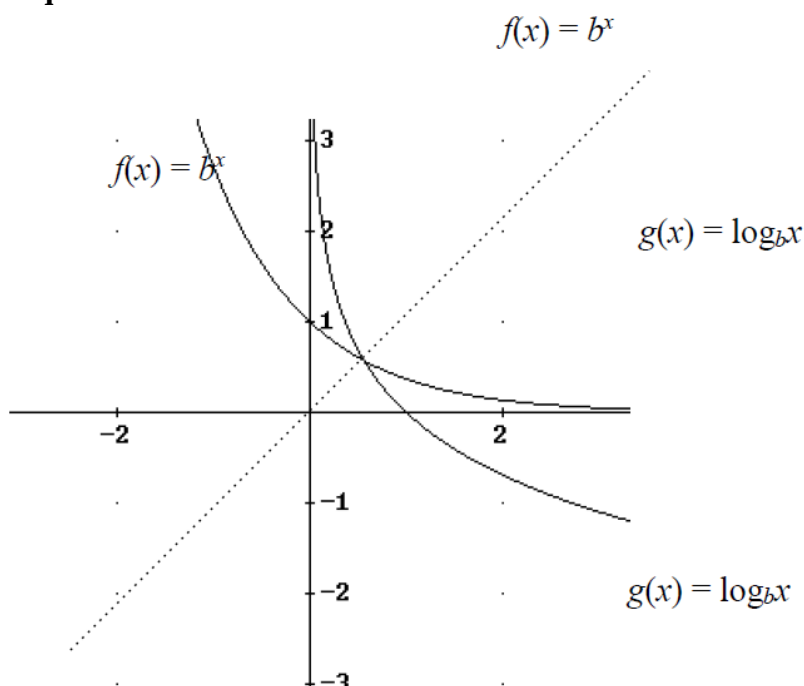


Figura 12. Base b menor que 1.

En resumen, la función logarítmica **con base $b > 1$** posee las siguientes propiedades:

- Está definida para $x > 0$, es decir, su dominio es $\mathbb{R}^+$
- Toma el valor 0 para $x = 1$.
- Es una función creciente que toma valores negativos para $0 < x < 1$ y positivos para $x > 1$.
- Crece rápidamente para las $x < 1$ y muy lentamente para las $x > 1$.
- Su rango son todos los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Todas estas propiedades son consecuencia inmediata de propiedades análogas de las exponenciales y se demuestran de esa forma.

Sean b, M y N números reales positivos, b diferente de 1 y p y x números reales. Entonces:

1. $\log_b 1 = 0$ El logaritmo de 1 siempre es 0
2. $\log_b b = 1$ El logaritmo de la base siempre es 1
3. $\log_b b^x = x$ Los efectos de la exponencial y el logaritmo se anulan entre sí.
4. $b^{\log_b x} = x$ Los efectos de la exponencial y el logaritmo se anulan entre sí.
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.

6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$ El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos.
7. $\log_b M^p = p \log_b M$ El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.
8. $\log_b M = \log_b N$ si y solo si $M = N$ El logaritmo es una función inyectiva.

Funciones trigonométricas circulares

Las funciones trigonométricas circulares son un conjunto de funciones que relacionan los ángulos de un triángulo rectángulo con las razones entre las longitudes de sus lados. Son herramientas fundamentales en matemáticas con aplicaciones en diversas áreas. Su estudio ha experimentado un desarrollo significativo a lo largo de la historia, con avances en su comprensión teórica y aplicaciones prácticas.

Avances recientes:

- Demostraciones más robustas: Se han desarrollado demostraciones más sólidas de propiedades fundamentales de las funciones trigonométricas, como la identidad de Euler y las fórmulas de suma y diferencia.
- Análisis más profundo: Se han realizado análisis más profundos del comportamiento de las funciones trigonométricas, incluyendo su comportamiento asintótico y la existencia de puntos fijos.
- Aplicaciones en nuevas áreas: Se han encontrado nuevas aplicaciones de las funciones trigonométricas en áreas como la biología, la economía y la física.

Propiedades:

- Definición: Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente se definen como las razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.
- Identidades: Existen diversas identidades trigonométricas que relacionan las funciones trigonométricas entre sí, como la identidad de Pitágoras, las fórmulas de suma y diferencia y la identidad de Euler.
- Periodicidad: Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, lo que significa que se repiten a intervalos regulares.

- Comportamiento asintótico: Las funciones trigonométricas tienen un comportamiento asintótico específico, como el hecho de que el seno y el coseno oscilan entre -1 y 1, mientras que la tangente tiende a infinito en ciertos puntos.

Aplicaciones:

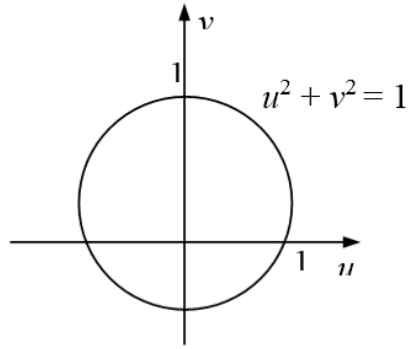
- Modelado de fenómenos: Las funciones trigonométricas se utilizan para modelar fenómenos periódicos, como el movimiento oscilatorio, las ondas sonoras y las ondas de luz.
- Navegación: Las funciones trigonométricas se utilizan en la navegación para determinar la posición y la dirección.
- Cálculo de áreas y volúmenes: Las funciones trigonométricas se utilizan para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas.
- Existen diversos software y herramientas para trabajar con funciones trigonométricas, como calculadoras, paquetes de software matemático y bibliotecas de código.
- A pesar de los avances, aún existen desafíos en el estudio de las funciones trigonométricas, como la comprensión completa de su comportamiento en el plano complejo.
- Se requiere un mayor desarrollo de métodos para aplicar las funciones trigonométricas a problemas en áreas nuevas.

Las funciones trigonométricas circulares son una herramienta matemática poderosa con un estado del arte en constante evolución. Su estudio y aplicación se encuentran en expansión, con un futuro prometedor en diversas áreas.

El círculo unitario

Definición

El círculo unitario es un círculo con centro en el origen de coordenadas y radio 1. Si los ejes los llamamos u y v su ecuación será: $u^2 + v^2 = 1$. A los puntos del círculo unitario se les llama puntos circulares.



- Nótese que, en rigor, debería llamarse **circunferencia** unitaria y no **círculo** unitario.

Identidades trigonométricas básicas

- Las identidades que siguen son consecuencia inmediata de las definiciones de las funciones circulares.
- En todos los casos las identidades tienen su dominio natural de definición.
- En el texto les asignan un nombre a cada grupo pero no merece la pena.
- Todas estas identidades hay que recordarlas de memoria y además saberlas demostrar.

$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	$\cos(-x) = \cos x$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$		$\tan(-x) = -\tan x$	$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Ejemplo

Utilizando las identidades básicas, halle las demás funciones circulares si se sabe que:
 $\sec x = 2$ y $\tan x < 0$

Solución

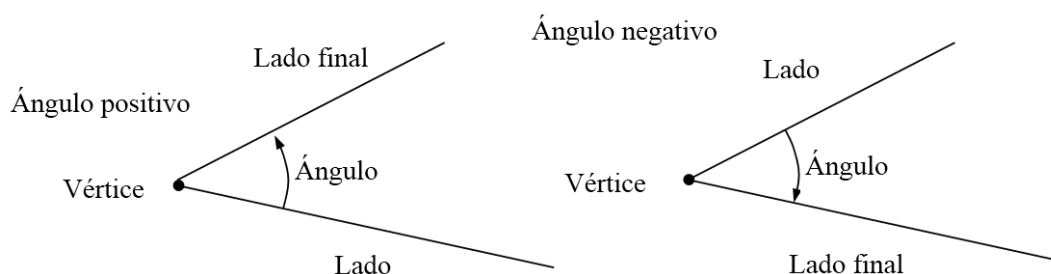
Como $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ entonces $\cos(x) = \frac{1}{2}$
 Como $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ entonces $\tan x = \pm \sqrt{\sec^2 x - 1} = \pm \sqrt{3}$.

Pero $\tan x < 0$, así que $\tan x = -\sqrt{3}$
 Como $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ entonces $\operatorname{sen} x = \tan x \cos x = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	entonces	$\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
Como	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$	entonces	$\csc x = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ángulo

- El concepto de ángulo es muy primario para definirlo. En lugar de ello lo que se hace es suponerlo como intuitivo y dar la terminología asociada con el concepto.



Ángulos en posición estándar o normal

Los ángulos en posición estándar o normal son una herramienta fundamental en trigonometría para determinar las razones trigonométricas de un ángulo. Su estudio ha experimentado un desarrollo significativo a lo largo de la historia, con avances en su comprensión teórica y aplicaciones prácticas.

Avances recientes:

- Demostraciones más robustas: Se han desarrollado demostraciones más sólidas de las propiedades fundamentales de los ángulos en posición estándar, como la relación entre la medida de un ángulo y sus razones trigonométricas.
- Análisis más profundo: Se han realizado análisis más profundos del comportamiento de las funciones trigonométricas en función de la posición del ángulo, incluyendo el estudio de la periodicidad y la simetría.
- Aplicaciones en nuevas áreas: Se han encontrado nuevas aplicaciones de los ángulos en posición estándar en áreas como la computación gráfica, la robótica y la astronomía.

Propiedades:

- Definición: Un ángulo en posición estándar o normal se define como un ángulo con vértice en el origen, lado inicial sobre el eje positivo X y lado final en cualquier posición sobre el plano cartesiano.
- Medición: La medida de un ángulo en posición estándar se expresa en grados o radianes.
- Razones trigonométricas: Las razones trigonométricas de un ángulo en posición estándar se definen como las razones entre las coordenadas del punto donde el lado final intersecta la circunferencia unitaria.
- Relaciones entre razones trigonométricas: Existen diversas relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo en posición estándar, como las identidades trigonométricas y las fórmulas de suma y diferencia.

Aplicaciones:

- Cálculo de razones trigonométricas: Los ángulos en posición estándar se utilizan para calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo.
- Resolución de triángulos: Los ángulos en posición estándar se utilizan para resolver triángulos, es decir, para determinar las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos.
- Modelado de fenómenos: Los ángulos en posición estándar se utilizan para modelar fenómenos que involucran rotación, como el movimiento de los planetas o el funcionamiento de un motor.
- Existen diversos software y herramientas para trabajar con ángulos en posición estándar, como calculadoras, paquetes de software matemático y bibliotecas de código.
- A pesar de los avances, aún existen desafíos en el estudio de los ángulos en posición estándar, como la comprensión completa de su comportamiento en el plano complejo.
- Se requiere un mayor desarrollo de métodos para aplicar los ángulos en posición estándar a problemas en áreas nuevas.

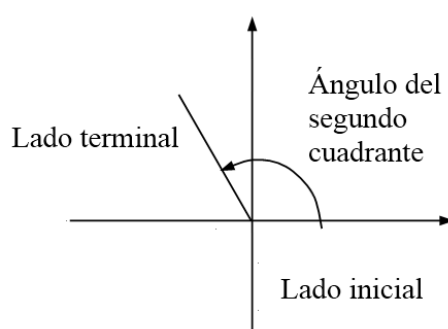
Los ángulos en posición estándar o normal son una herramienta matemática poderosa con un estado del arte en constante evolución. Su estudio y aplicación se encuentran en

expansión, con un futuro prometedor en diversas áreas. Son ángulos colocados en un sistema cartesiano de modo que:

- El vértice esté en el origen de coordenadas.
- El lado inicial coincide con el semieje horizontal positivo.

Una vez que un ángulo está en su forma estándar el mismo se denomina según el lugar donde caiga el lado terminal:

- Ángulo cuadrantal: cuando el lado terminal cae sobre uno de los ejes coordenados.
- Ángulo del primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante según que su lado terminal caiga en uno de estos cuadrantes.



Medida de un ángulo

Como cualquier otra magnitud (longitud, tiempo, masa, volumen, etc.) Los ángulos se miden por comparación con ciertos objetos que se toman arbitrariamente como unidad. En el caso de los ángulos, hay varios sistemas de medidas, basados en otras tantas unidades angulares. Las unidades más usadas son el grado y el radián.

Definiciones

-Un **grado** (sexagesimal) es la medida de un ángulo que es $\frac{1}{360}$ de una rotación completa.

-Un **radián** es la medida de un ángulo que, colocado con su vértice en una circunferencia, determina un arco de la misma longitud que el radio de la circunferencia.

En la siguiente figura se muestra dos circunferencias una con un ángulo de un grado y otra con uno de un radián:

- Un ángulo de 1 grado es muy pequeño. La esfera del reloj está dividida en 60 pequeños ángulos de 6 grados cada uno. Cada segundo el secundario da un salto de 6 grados.

- Para medir cuántos radianes tiene un ángulo basta colocar su vértice en una circunferencia y medir la longitud del arco usando como unidad el radio del círculo.
- Como una circunferencia completa mide $2\pi r$, entonces un ángulo de 360° mide 2π radianes, es decir:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes} = 6,2832 \text{ radianes}$$

o lo que es igual: $180^\circ = \pi \text{ radianes} = 3.1416 \text{ radianes}.$

O también: $1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} = 57,29577951 \text{ grados}$

En las aplicaciones más elementales de la geometría, se prefiere el grado. Sin embargo, muchas fórmulas geométricas resultan mucho más sencillas cuando el ángulo se mide en radianes.

Por ejemplo: Área de un sector de círculo de radio r :

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad \text{si el ángulo central del sector } (\theta) \text{ se mide en radianes.}$$

$$A = \frac{\pi}{360} r^2 \theta \quad \text{si el ángulo central del sector } (\theta) \text{ se mide en grados.}$$

- Un grado se divide en 60 minutos (') y un minuto en 60 segundos (") pero estas unidades solo se emplean en raras ocasiones. Hoy se prefiere trabajar en grados y partes de grado, por ejemplo $34,25^\circ$ en lugar de $34^\circ 15'$

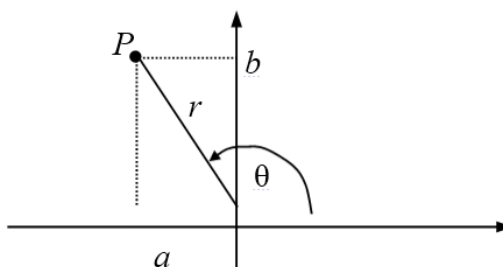
Definición de las funciones trigonométricas

Sea θ un ángulo cualquiera. Sea $P(a, b)$ un punto del lado terminal de θ cuando se coloca en su forma estándar. Sea r la distancia de P al origen de coordenadas. Entonces se define:

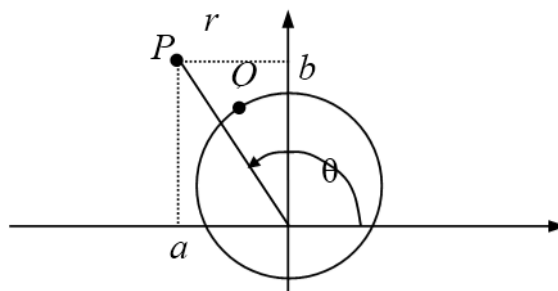
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{r} \quad \operatorname{csc} \theta = \frac{r}{b}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sec \theta = \frac{r}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad \cot \theta = \frac{a}{b}$$



La equivalencia entre ambas definiciones es bastante evidente. Para verlo, trace un círculo unitario y tome el punto circular Q sobre el lado terminal del ángulo:



Como la definición no especifica qué punto tomar sobre el lado terminal (no es necesario porque la proporción entre a , b y r es la misma) puede tomarse Q en lugar de P . Por otro lado, observe que en este caso como el radio es 1, la longitud x del arco es numéricamente igual a la medida de θ en radianes. Así que, según la definición original:

$\text{sen } \theta = \text{sen } x = \text{ordenada de } Q$, pues Q es un punto circular

Según la definición alterna:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada de } Q}{1} = \text{ordenada de } Q$$

Similarmemente sucede con las otras cinco funciones.

Funciones trigonométricas de ángulos notables

Las funciones trigonométricas de ángulos notables son un conjunto de valores específicos de las funciones seno, coseno y tangente para ciertos ángulos comunes. Estos ángulos, conocidos como ángulos notables, son aquellos que aparecen con frecuencia en geometría y trigonometría, como 30° , 45° y 60° .

Definición:

Las funciones trigonométricas de ángulos notables se definen como las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de los ángulos notables. Estas razones se pueden calcular utilizando diferentes métodos, como la trigonometría de triángulos rectángulos, la circunferencia unitaria o las identidades trigonométricas.

Propiedades:

- Las funciones trigonométricas de ángulos notables son valores exactos, es decir, no son decimales aproximados.
- Las funciones trigonométricas de ángulos notables se pueden expresar en términos de radicales y números racionales.
- Existen diversas identidades y relaciones entre las funciones trigonométricas de ángulos notables.

Aplicaciones:

Las funciones trigonométricas de ángulos notables se utilizan en diversas aplicaciones, como:

- Resolución de triángulos: Se utilizan para calcular las longitudes de los lados y la medida de los ángulos de un triángulo.
- Cálculo de áreas y volúmenes: Se utilizan para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas.
- Modelado de fenómenos: Se utilizan para modelar fenómenos físicos que involucran ángulos, como la trayectoria de una pelota lanzada al aire.

Tabla de funciones trigonométricas de ángulos notables:

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0	1	0
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/ $\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

Las funciones trigonométricas de ángulos notables son una herramienta matemática poderosa que se utiliza en diversas áreas. Su conocimiento y aplicación facilita la resolución de problemas geométricos y físicos.

Los números notables que estudiamos corresponden a ángulos notables cuando se trabaja en radianes. Dada la definición, por ejemplo:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \text{ rad}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donde, el argumento de la primera función es un ángulo y el de la segunda es un número real que representa a un arco de longitud $\pi/6$. En realidad, este ángulo y este arco están tan estrechamente ligados que suelen confundirse los conceptos pues la única diferencia es la magnitud que representan, no su valor numérico.

Importante: Basta sólo saber que dado un punto P en cualquier cuadrante el seno siempre es la ordenada y el coseno la abscisa de dicho punto, para entonces inferir valores y/o signos de las 6 funciones trigonométricas.

Distinguimos los siguientes ángulos notables:

En radianes	En grados
$\frac{\pi}{6}$	30
$\frac{\pi}{4}$	45
$\frac{\pi}{3}$	60
$\frac{\pi}{2}$	90

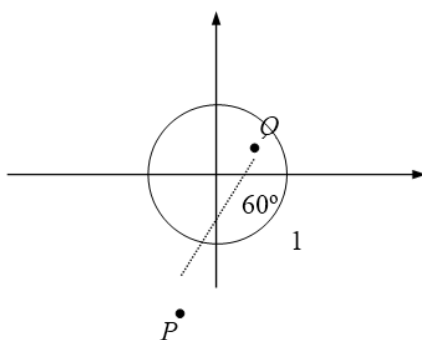
Y, además, todos los ángulos cuadrantales, cuya medida en radianes es múltiplo de $\pi/2$ y, en grados, es múltiplo de 90. Aplicando simetrías se pueden determinar las funciones trigonométricas de otros muchos ángulos del segundo, tercero y cuarto cuadrantes, de la misma forma que se hacía con los números notables.

Ejemplo

Determinar las funciones trigonométricas de 240°

Solución:

Como 240° es $180^\circ + 60^\circ$, se trata de un ángulo del tercer cuadrante, como se muestra en la figura. El punto P determinado por este ángulo es simétrico del punto Q determinado por el ángulo de 60° . A partir de las coordenadas de Q se determinan las de P y con eso los valores de las seis funciones trigonométricas. Cómo 60° significan $\pi/3$ radianes:



Las coordenadas de Q son: $w\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ así que las de P serán: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Luego: $\sin(240^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(240^\circ) = -\frac{1}{2}$ $\tan(240^\circ) = \sqrt{3}$

$\csc(240^\circ) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\sec(240^\circ) = -2$ $\cot(240^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Identidades trigonométricas básicas

Dada la coincidencia de los valores de las funciones trigonométricas y las circulares, todas las identidades circulares son también identidades trigonométricas. La diferencia, bastante sutil, es que los argumentos ahora serían ángulos. Igual que antes, estas identidades, entre otras cosas, permiten hallar los valores de las funciones trigonométricas a partir de una de ellas y de algún dato que permita determinar sin ambigüedades el cuadrante del ángulo.

Algunos ejemplos de funciones especiales:

Función parte entera

Al descomponer un número real “x” en la forma: $x = n + y$ con $0 \leq y < 1$, al número $n \in \mathbb{Z}$ se le denomina PARTE ENTERA DE “x” que se denota por: $[x]$, y la otra parte $y = x - [x]$ se le denomina MANTISA de “x” que suele denotarse por $m(x) = x - [x]$, que significa SOBRANTE.

Función Signo

$$\text{sig}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sugerimos al lector hacer la gráfica de esta función.

Función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

La gráfica es verdaderamente interesante. INTÉNTELO!!!

Transformaciones asociadas a una función:

Desplazamientos (traslaciones) verticales

$$y = f(x) + k \begin{cases} k > 0 \text{ desplaz. de la gráfica de } f(x), k \text{ unidades hacia arriba} \\ k < 0 \text{ desplaz. de la gráfica de } f(x), k \text{ unidades hacia abajo} \end{cases}$$

Desplazamientos (traslaciones) horizontales:

$$y = f(x+h) \begin{cases} h > 0 \text{ desplaz. de la gráfica de } f(x), h \text{ unidades a la izquierda} \\ h < 0 \text{ desplaz. de la gráfica de } f(x), h \text{ unidades a la derecha} \end{cases}$$

Reflexión:

$y = -f(x)$ refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje “x”.

Dilatación (expansión) o contracción vertical

$$Y = Af(x)$$

$$\begin{cases} A > 1 \text{ dilata la gráfica de } f(x) \text{ verticalmente multip. cada ordenada por } A. \\ 0 < A < 1 \text{ contrae la gráfica de } f(x) \text{ verticalmente multip. cada ordenada por } A \end{cases}$$

Con el resumen anterior, es posible construir la gráfica de nuevas funciones a partir de funciones de gráficos conocidos y simples.

Ejercicios propuestos:

Representar gráficamente las funciones:

a) $f(x) = (x + 3)^2 - 4$

b) $f(x) = x^3 - 2$

c) $f(x) = |x - 4|$

Conclusiones del capítulo

El estudio de funciones de una variable real nos permite comprender en detalle cómo se comportan y cómo interactúan diferentes aspectos de una función, como su dominio, rango, continuidad y derivadas.

Durante este capítulo, se exploraron métodos para analizar y representar gráficamente funciones, lo que nos proporciona una visión intuitiva de su comportamiento y propiedades.

Mediante técnicas como el análisis de la variación de la función, la identificación de puntos críticos y la determinación de la concavidad y puntos de inflexión, podemos obtener una comprensión más profunda de cómo se comporta una función en diferentes partes de su dominio.

La aplicación de la regla de la cadena y otras reglas de derivación nos permite calcular la tasa de cambio instantánea de una función en un punto dado, lo que es esencial para entender su comportamiento local y global.

El teorema del valor medio y el teorema de Rolle son herramientas importantes que nos ayudan a comprender las propiedades de las funciones derivables en un intervalo dado, proporcionando información valiosa sobre la existencia y ubicación de puntos críticos y extremos relativos.

Al estudiar funciones de una variable real, también nos encontramos con conceptos como la continuidad y la existencia de límites, que son fundamentales para comprender el comportamiento de una función en su conjunto y en puntos específicos de su dominio.

El capítulo proporciona una base sólida para comprender y analizar una amplia variedad de funciones de una variable real, lo que es fundamental para aplicaciones en campos como la física, la economía, la ingeniería y otras disciplinas científicas y técnicas.

Capítulo III.- Función de varias variables

Una función de varias variables es una función que relaciona un conjunto de n variables independientes con una única variable dependiente. En otras palabras, la función toma n valores de entrada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y produce un único valor de salida (y) .

Definición formal:

Una función de varias variables f se define como:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

donde:

- $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclídeo de n dimensiones.
- $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.
- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el valor de la función para los valores de entrada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ejemplos:

- La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de dos variables que toma dos valores de entrada $(x$ e $y)$ y produce un único valor de salida $(x^2 + y^2)$.
- La función $g(x, y, z) = xyz$ es una función de tres variables que toma tres valores de entrada $(x, y$ e $z)$ y produce un único valor de salida (xyz) .

Propiedades:

- Dominio: El dominio de una función de varias variables es el conjunto de todos los valores de entrada para los cuales la función está definida.
- Rango: El rango de una función de varias variables es el conjunto de todos los valores de salida que la función puede tomar.
- Continuidad: Una función de varias variables es continua si para cualquier punto en su dominio, existe un límite para la función cuando los valores de entrada se aproximan a ese punto.
- Derivabilidad: Una función de varias variables es derivable si tiene derivadas parciales con respecto a cada una de sus variables.

Las funciones de varias variables se utilizan en diversas áreas, como:

- Cálculo: Se utilizan para calcular áreas, volúmenes y otras propiedades geométricas de figuras tridimensionales.
- Física: Se utilizan para modelar fenómenos físicos como el movimiento de objetos en el espacio o la propagación de ondas.
- Economía: Se utilizan para modelar el comportamiento de los mercados y la economía en general.
- Ingeniería: Se utilizan para diseñar y analizar estructuras, máquinas y otros sistemas.

Existen diversos software y herramientas para trabajar con funciones de varias variables, como:

- Calculadoras: Permiten calcular valores de funciones de varias variables.
- Paquetes de software matemático: Permiten graficar funciones de varias variables, calcular derivadas parciales e integrales dobles y triples.
- Bibliotecas de código: Permiten implementar funciones de varias variables en diferentes lenguajes de programación.

Las funciones de varias variables son una herramienta matemática poderosa que se utiliza en diversas áreas. Su estudio y aplicación facilita la modelización y el análisis de fenómenos del mundo real.

Definición de función de varias variables

DEFINICIÓN: Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Se llama función real de n variables a toda regla f que a cada punto $(x_1, \dots, x_n) \in D$ le asigna un número real único.

Esto se expresa así:

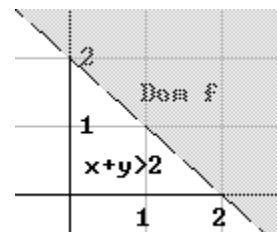
$$f : \begin{matrix} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \rightarrow & f(x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \quad \text{o} \quad z = f(x_1, \dots, x_n),$$

donde D es el *dominio* de la función, z es la *función* y $x_1, \dots, x_n$ son las *variables independientes*. En particular, para funciones de dos y tres variables escribiremos $z = f(x, y)$ y $u = f(x, y, z)$ respectivamente.

Lo más elemental que se debe conocer de una función es su dominio y cómo se obtiene el valor de esta para un elemento del dominio.

Ejemplos:

1.-Sea $z = \ln(x + y - 2)$. Entonces:



a) $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 > 0\}$, o sea, el conjunto de todos los

puntos del plano tales que $x + y > 2$. Estos son los puntos que están por encima de la recta $x + y = 2$

b) El valor de la función en un punto $(x_0, y_0) \in \text{Dom } f$ se obtiene sustituyendo a x por

x_0 y a y por y_0 como se muestra a continuación:

$$f(1; 2) = \ln(1 + 2 - 2) = \ln 1 = 0.$$

$$f(2; e) = \ln(2 + e - 2) = \ln e = 1.$$

$$f(-1; 5) = \ln(-1 + 5 - 2) = \ln 2.$$

2.-Sea $c = 3,5x + 2,75y + 5z$ el gasto de un consumidor que debe comprar x , y e z libras de arroz, azúcar y frijoles respectivamente. Entonces:

a) $\text{Dom } c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, o sea, esta función no tiene sentido si sus argumentos son negativos.

b) $c(10; 10; 2) = 3,5 \cdot 10 + 2,75 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 72,50$. Esto significa que 10 lb de arroz, 10 lb de azúcar y 2 lb de frijoles cuestan, en total, \$72,50.

c) $c(2; 4; 0) = 3,5 \cdot 2 + 2,75 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 12$. Esto quiere decir que, si el consumidor compra 2 lb de arroz, 4 lb de azúcar y no comprar frijoles, entonces gasta \$12.

3.-Con mucha frecuencia utilizaremos la *función de producción de Cobb-Douglas*:

$$q = A k^\alpha l^\beta.$$

Aquí, q es la cantidad de producto fabricada, k es el capital invertido, l es la fuerza de trabajo empleada, A es una constante positiva que indica el estado general de la tecnología utilizada, mientras que α y β son dos constantes positivas tales que $\alpha + \beta = 1$.

Curvas de nivel

Una de las formas de expresar una función de varias variables, que tiene importantes aplicaciones en la práctica, es mediante sus conjuntos de nivel.

DEFINICIÓN. Se llama *conjunto de nivel* de la función $f(x, y)$ al conjunto de todos los puntos (x, y) del dominio de la función para los cuales $f(x, y)$ es constante.

De la definición se deduce que una función tiene tantos conjuntos de nivel como valores, pues cada valor de la función determina exactamente un conjunto de nivel. El conjunto de nivel determinado por el valor k , lo denotaremos por F_k , o sea:

$$F_k = \{(x, y) \in \text{Dom } f : f(x, y) = k\}$$

Ejemplo:

1.-Dada la función $f(x, y) = y - x^2$. Determine y represente gráficamente los conjuntos de nivel para los cuales $z = -1$, $z = 0$, $z = 2$.

Los conjuntos de nivel pedidos son:

$$F_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}.$$

$$F_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 2\}.$$

Gráficamente, F_{-1} es la parábola $y = x^2 - 1$, F_0 es la parábola normal

$y = x^2$, mientras que F_2 es la parábola $y = x^2 + 2$

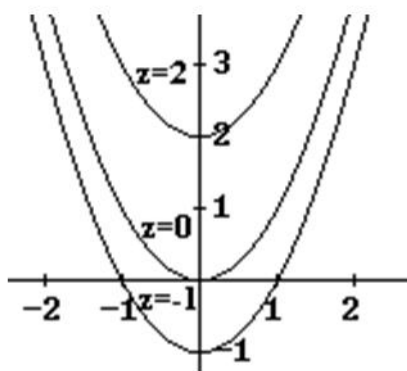


Figura 13. Función de varias variables.

Como se puede ver en ejemplo anterior, cuando la función depende de dos variables, sus conjuntos de nivel representan, geométicamente, curvas en el plano. Estas curvas se

denominan *curvas de nivel* de la función. Nótese además que estas curvas son paralelas entre sí.

Por otro lado, en todos los puntos de una curva de nivel, la función tiene el mismo valor. Es por eso que: para algunas funciones específicas, las curvas de nivel se identifican con el prefijo “*iso*” que significa igual. Por eso es que:

- Las curvas de nivel de la función de costo se llaman curvas de *isocosto* y eso significa que: en todos los puntos situados sobre una de ellas, el costo es el mismo.
- Las curvas de nivel de la función de producción se llaman curvas *isocuantas* y están formadas por las combinaciones de factores de producción para las cuales se obtiene la misma cantidad de producto, o sea, que mantienen estable el nivel de producción.
- Las curvas de nivel de la función que describe la temperatura se llaman curvas *isotérmicas*, las curvas de nivel de la función que describe la presión atmosférica se llaman curvas *isobáricas*, etc.

Ejemplo:

1.-Se deben comprar x libras de tomate, a \$2 la libra, e y libras de arroz, a \$3 cada una.

- a) Determine la función de gasto total de un consumidor.
- b) Determine e interprete económicamente los conjuntos de nivel para los cuales el gasto es de \$3, \$6 y \$9.
- c) Trace las curvas de *isocosto* correspondiente a los conjuntos del inciso b).

Solución

x : libras de tomate

y : libras de arroz

$$x \geq 0; \quad y \geq 0$$

a) El gasto total de un consumidor viene dado por la función $c(x, y) = 2x + 3y$.

b) Los conjuntos de nivel para los cuales el costo es de \$3, \$6 y \$9 son:

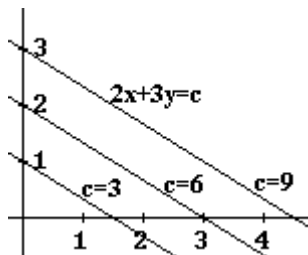
$$C_3 = \{(x, y) : 2x + 3y = 3\}$$

$$C_6 = \{(x, y) : 2x + 3y = 6\}$$

$$C_9 = \{(x, y) : 2x + 3y = 9\}.$$

El primero representa el conjunto de todas las combinaciones de producto que puede adquirir un consumidor manteniendo el nivel de gasto en \$3. Análogamente se interpretan los otros.

- d) Las curvas de *isocosto* son los segmentos de las rectas $2x + 3y = 3$, $2x + 3y = 6$ y $2x + 3y = 9$ situados en el primer cuadrante



Límite y continuidad

Sin perder la generalidad, vamos a tratar los conceptos que siguen para funciones de dos variables.

DEFINICIÓN. Una función $f(x, y)$ tiene *límite* L cuando $x \rightarrow x_0$ e $y \rightarrow y_0$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L.$$

En este caso se escribe:

(I)

Observación:

1.-La notación (I) indica por cualquier vía que $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, la función tiende a L .

Indica además que $x \rightarrow x_0$ al mismo tiempo que $y \rightarrow y_0$, o sea, ambas variables se mueven simultáneamente. Por esta razón el límite (I) se llama *límite doble* y es la generalización del concepto de límite ordinario que vimos para funciones de una variable.

2.-El límite doble no se puede confundir, de ninguna manera, con los *límites iterados*:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] \quad (II)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right] \quad (III)$$

pues éstos indican hacia donde tiende la función $f(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ siguiendo la dirección de los ejes de coordenadas. Los límites iterados constituyen la generalización de los límites laterales que estudiamos para funciones de una variable. De acuerdo con las observaciones anteriores, es evidente que *si existe el límite doble (I), existen también y son iguales los límites iterados (II) y (III)*. Lo contrario no siempre se cumple, o sea, *si los límites iterados son iguales, no se puede afirmar que existe el límite doble*. Por tanto, la existencia e igualdad de los límites iterados es una condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia del límite doble.

Ejemplo:

1.-Sea $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ con $(x,y) \neq (0;0)$. Analizar si existe el límite de cuando $(x,y) \rightarrow (0;0)$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{0}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$b) \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0}{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Los límites iterados son iguales, pero esto no indica que el límite doble existe.

Veamos qué ocurre si (x,y) se acerca a $(0;0)$ por la curva $y = x^2$.

$$c) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0;0) \\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como hemos encontrado una forma de llegar al origen para la cual el límite difiere de los límites iterados, podemos afirmar que el límite doble no existe, o sea, la función dada no tiene límite cuando x e y tienden a cero simultáneamente.

De la misma forma que las funciones de una variable, las funciones de dos variables son continuas en los puntos para los cuales el valor de la función y el límite doble coinciden.

Definición.

La función $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

De acuerdo con la continuidad de las funciones básicas estudiadas para el caso en que estas dependen de una sola variable, las funciones de dos variables dada por una expresión formada por funciones elementales básicas son continuas en todos los puntos donde la expresión esté definida. Esto nos permite calcular algunos límites de funciones de dos variables siguiendo procedimientos similares a los que se utilizaron para el cálculo de límites de funciones de una variable.

Ejemplo:

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1;1)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1;1)} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1;1)} (x^2 + xy + y^2) = 3.$$

Estas nociones de límite y continuidad para una función de dos variables pueden extenderse a funciones de más de dos variables.

Derivadas parciales**Definición.**

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se llama *derivada parcial* de f con respecto a x al $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, si esto existe.

La derivada parcial de f con respecto a x se denota por $\frac{\partial f}{\partial x}$ o por f_x , o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Análogamente se denota y se define la derivada parcial de f con respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Al calcular el límite que define la derivada parcial de f con respecto a x , la y permanece fija. De la misma forma, al calcular el límite que define la derivada parcial de f con respecto a y , la x permanece fija. Esto nos indica que, en el proceso de cálculo de las derivadas parciales, la función se considera dependiente, únicamente de la variable de derivación, mientras que el resto de las variables permanecen fijas; por tanto, aquí se aplican las mismas reglas de derivación que se utilizan para la derivación de funciones de

una sola variable, teniendo en cuenta que a las variables que permanecen fijas se les aplican las reglas de derivación de la función constante.

Ejemplos:

1.-Sea $z = x^3 + 8xy + 5y^2$. Entonces:

$$a) \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8y + 0 = 3x^2 + 8y$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 8x + 10y = 8x + 10y$$

2.-La función $f(x, y, z) = \sqrt{2x + 3y + 4z}$ tiene tres derivadas parciales:

$$a) f_x = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 4z)}{2\sqrt{2x + 3y + 4z}} = \frac{2}{2\sqrt{2x + 3y + 4z}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 3y + 4z}}$$

$$b) f_y = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4z)}{2\sqrt{2x + 3y + 4z}} = \frac{3}{2\sqrt{2x + 3y + 4z}}$$

$$c) f_z = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(2x + 3y + 4z)}{2\sqrt{2x + 3y + 4z}} = \frac{4}{2\sqrt{2x + 3y + 4z}} = \frac{2}{\sqrt{2x + 3y + 4z}}$$

En muchos de los problemas que vamos a resolver más adelante, es necesario hallar el valor específico de una o más derivadas parciales en un punto de su dominio. Eso se hace evaluando la derivada, de la misma forma que lo hacemos para una función cualquiera. Sin embargo, hay que tener mucho cuidado en la forma de indicarlo, pues esta varía en dependencia de la notación que se use para la derivada y de la situación real que se esté resolviendo.

Ejemplo:

2.-Sea $f(x, y) = xy^2 + 2x^2y$. Evaluar la derivada parcial de f con respecto x en un punto.

a) Si la derivada se denota por $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2x$, entonces su valor en el punto (1; 2) se

$$\text{indica y se calcula así: } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1; 2)} = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6.$$

b) Si la derivada se denota por $f_x = y^2 + 2x$, entonces su valor en $(-3; 4)$ se indica

y se calcula de esta forma: $f_x(-3; 4) = 4^2 + 2(-3) = 10$

En el ejemplo anterior, la función viene dada en la forma $f(x, y)$ y eso indica que a la x se le asigna el valor de la primera coordenada del punto, mientras que a la y se le asigna el valor de la segunda coordenada. Ahora bien, si la misma función se expresa en la forma $z = xy^2 + 2x^2y$ el orden entre x e y no queda claro. En situaciones como esta, a veces se asume por defecto, el orden alfabético. Sin embargo, este puede no ser el orden de las variables y entonces se comete un error al evaluar la función. Por tanto, en estos casos, lo rigurosamente correcto es indicar el valor de cada variable.

Ejemplo:

3.-Sea $w = \alpha^2 x^2$. Evaluar la derivada de w con respecto a α para $x = 2$ y $\alpha = 5$.

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = 2\alpha x^2. \text{ Por tanto, } \left. \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha=5 \\ x=2}} = 2 \cdot 5 \cdot 2^2 = 40.$$

A partir de las derivadas parciales se puede obtener un vector llamado *Gradiente* de la función cuyas componentes son las derivadas parciales de la función. Se denota por ∇f : “se lee nabla f ”. Este vector es variable porque depende de las mismas variables que la función que lo genera, por eso para obtener el gradiente en un punto específico hay que evaluarlo para el punto en cuestión.

Ejemplo:

3.-Sea $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^2 + z)$. Entonces:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{3x^2}{x^3 + y^2 + z}, \frac{2y}{x^3 + y^2 + z}, \frac{1}{x^3 + y^2 + z} \right).$$

$$\nabla f(-1; 2; 0) = \left(\frac{3}{-1+4+0}, \frac{4}{-1+4+0}, \frac{1}{-1+4+0} \right) = \left(1; \frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right).$$

Derivadas parciales de orden superior

Si las derivadas parciales de la función $z = f(x, y)$ son funciones derivables, entonces sus respectivas derivadas parciales se llaman derivadas parciales de segundo orden de f . Las segundas derivadas parciales se calculan y se denotan como sigue:

$$\text{a) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{b) } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{c) } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{d) } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

En la otra notación quedan como sigue:

$$\text{a) } (f_x)_x = f_{xx} \quad \text{b) } (f_x)_y = f_{xy} \quad \text{c) } (f_y)_x = f_{yx} \quad \text{d) } (f_y)_y = f_{yy}$$

Nótese que una función de dos variables tiene $2^1 = 2$ derivadas parciales de primer orden, $2^2 = 4$ derivadas de segundo orden y así sucesivamente. En general, una función de n variable tiene n^k derivadas parciales de orden k

Ejemplos:

1.-Sea $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$. Entonces tiene 9 derivadas parciales de segundo orden. En efecto:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy^3z^4 & f_{xx} &= 2y^3z^4 & f_{xy} &= 6xy^2z^4 & f_{xz} &= 4xy^3z^3 \\ f_y &= 3x^2y^2z^4 & f_{yx} &= 6xy^2z^4 & f_{yy} &= 6x^2yz^4 & f_{yz} &= 12x^2y^2z^3 \\ f_z &= 4x^2y^3z^3 & f_{zx} &= 8xy^3z^3 & f_{zy} &= 12x^2y^2z^3 & f_{zz} &= 12x^2y^3z^2 \end{aligned}$$

Las derivadas de segundo orden se pueden disponer en una matriz cuadrada cuyo orden coincide con el número de variables de la función. Esta matriz se llama *matriz hessiana* de la función dada y se denota con la letra H .

Ejemplo:

2.-De acuerdo con el ejemplo anterior, la matriz hessiana de $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ es

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^3z^4 & 6xy^2z^4 & 4xy^3z^3 \\ 6xy^2z^4 & 6x^2yz^4 & 12x^2y^2z^3 \\ 8xy^3z^3 & 12x^2y^2z^3 & 12x^2y^3z^2 \end{bmatrix}.$$

Las derivadas de segundo orden que se obtienen derivando con respecto a las mismas variables, pero en orden contrario se llaman derivadas parciales *cruzadas* o *mixtas*. Para

estas derivadas se cumple una propiedad muy importante conocida como teorema de *Schwartz*.

Teorema. Si la función $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} son continuas, entonces se cumple que $f_{xy} = f_{yx}$.

De acuerdo con el teorema de *Schwartz*, si se cumplen las condiciones de este, entonces la matriz *hessiana* es simétrica. Esto se debe a que las derivadas parciales cruzadas, que son iguales, son simétricas con respecto a la diagonal principal de la matriz *hessiana*, como se sucede en el ejemplo anterior.

De manera análoga a las derivadas de segundo orden, se calculan las derivadas parciales de orden superior a 2.

Ejemplo: 3.-Dada la función $u = x^5 y^4 e^t$. Hallar:

$$a) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (x^5 y^4 e^t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (4x^5 y^3 e^t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (20x^4 y^3 e^t) = 80x^3 y^3 e^t$$

$$b) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^5 y^4 e^t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} (5x^4 y^4 e^t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (20x^4 y^3 e^t) = 80x^3 y^3 e^t$$

Nótese que aquí se derivó dos veces con respecto a x y una vez con respecto a y en órdenes distintos, sin embargo, las derivadas obtenidas por las dos vías son iguales. Esto se debe a que cumplen las condiciones del teorema de *Schwartz*.

$$\begin{aligned} c) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial t} &= \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{\partial}{\partial t} (x^5 y^4 e^t) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (x^5 y^4 e^t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (4x^5 y^3 e^t) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (20x^4 y^3 e^t) \\ &= 80x^3 y^3 e^t \end{aligned}$$

Interpretación económica de las derivadas parciales

Las derivadas parciales tienen una interpretación análoga a la derivada ordinaria vista para funciones de una variable. Por ejemplo, si $u = f(x, y, z)$ es la función de utilidad total por la producción y venta de tres productos en cantidades x, y, z , entonces las derivadas parciales u_x, u_y, u_z representan las utilidades marginales con respecto a x, y, z

respectivamente. Análogamente ocurre con la función de costo, de ingreso, de producción, etc.

En general, el valor de una derivada parcial en un punto representa la tasa de variación de la función total con respecto a la variable de derivación, siempre que las demás variables permanezcan fijas.

Ejemplos:

1.-Una fábrica produce x pares de botas e y pares de tenis semanalmente. El costo total

de la producción es $c = 0,06x^2 + 7x + 15y + 1000$.

a) Determine las funciones de costo marginal.

b) Halle los costos marginales si se fabrican 100 pares de botas y 50 pares de tenis por semana.

c) Interprete los resultados económicamente.

Planteamiento:

x : pares de botas fabricados semanalmente

y : pares de tenis fabricados semanalmente

$$c(x, y) = 0,06x^2 + 7x + 15y + 1000 \text{ pesos}$$

$$x_0 = 100 \text{ pares de botas}$$

$$y_0 = 50 \text{ pares de tenis}$$

Resolución:

$$\text{a) } \frac{\partial c}{\partial x} = 0,12x + 7 \quad (\text{Costo marginal con respecto a la producción de botas}).$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 15 \quad (\text{Costo marginal con respecto a la producción de tenis}).$$

$$\text{b) } \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{(100; 50)} = 0,12 \cdot 100 + 7 = 19 \quad \text{pesos por par de botas.}$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{(100; 50)} = 15 \quad \text{pesos por par de tenis.}$$

Conclusión:

Esto significa que, si se mantiene la producción de 50 pares de tenis semanales, entonces el costo total aumentará aproximadamente en \$19 por cada par de botas que se fabrique por encima de los 100 pares semanalmente. Sin embargo, el costo total

aumenta en \$15 por cada par de tenis que se fabrique, independientemente del nivel de producción que alcance la fábrica, porque es constante.

2.-La cantidad de cajas de un tipo de juguete que se puede fabricar semanalmente es

$q = \sqrt{kl}$ donde k es el capital empleado (en cientos de pesos) y l es el número de horas de mano de obra.

a) Determine las funciones de productividad marginal.

b) Halle los rendimientos marginales para si se trabajan 400 horas por semana y se emplean 16 cientos de pesos.

c) Interprete los resultados del inciso b).

Planteamiento:

k : cientos de pesos empleados en la producción semanalmente.

l : horas de mano de obra empleada semanalmente.

$q(k, l) = \sqrt{kl}$ cajas de juguete fabricadas semanalmente.

$k = 16$ cientos de pesos.

$l = 400$ horas de mano de obra.

Resolución:

a) $\frac{\partial q}{\partial k} = \frac{l}{2\sqrt{kl}}$. Productividad marginal con respecto al capital.

$\frac{\partial q}{\partial l} = \frac{k}{2\sqrt{kl}}$. Productividad marginal con respecto a la mano de obra.

b) $\left. \frac{\partial q}{\partial k} \right|_{(16; 400)} = \frac{400}{2\sqrt{16 \cdot 400}} = \frac{5}{2} = 1,5$

$\left. \frac{\partial q}{\partial l} \right|_{(16; 400)} = \frac{16}{2\sqrt{16 \cdot 400}} = \frac{1}{10} = 0,1$

Conclusiones:

De acuerdo con los resultados obtenidos en el inciso b), si se emplean 400 horas de mano de obra semanal, entonces la producción aumenta aproximadamente en 1,5 cajas semanalmente por cada \$100 que aumente el capital por encima de \$1600. Sin embargo, si se fija el capital en \$1600, entonces la producción aumenta

aproximadamente en 0,1 caja de juguete por cada hora de mano de obra que se aumente por encima de las 400 horas semanales.

Elasticidades parciales

Recordemos que la elasticidad de una función de una variable: $y = f(x)$, es $\eta = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$.

Análogamente se definen las elasticidades parciales de una función de varias variables.

DEFINICIÓN: Sea $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se denomina *elasticidad parcial* de z con

respecto a x_i ($i = 1; 2; \dots, n$) a la expresión $\frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{z}$. Se denota por $E_{x_i} z$, o sea,

$$E_{x_i} z = \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{z}.$$

Ejemplo:

1.-Determine las elasticidades parciales de la función $z = xe^y$.

$$a) E_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z} = e^y \cdot \frac{x}{xe^y} = 1$$

$$b) E_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z} = xe^y \cdot \frac{y}{xe^y} = y$$

El número que se obtiene al evaluar la elasticidad parcial de z con respecto a una variable en un punto representa una aproximación del porcentaje de variación de z cuando dicha variable aumenta en un 1%, a partir del punto indicado, manteniendo las demás variables fijas.

Ejemplo:

2.-La función de demanda del producto A es $q_1 = 1000 - 20p_1 + 10p_2$ donde p_1 es el precio unitario del producto A y p_2 es el precio unitario otro producto B. Determine e interprete las elasticidades parciales de la demanda de A cuando $p_1 = 30$ y $p_2 = 30$.

Planteamiento:

p_1 : pesos por unidad de producto A

p_2 : pesos por unidad de producto B

$p_1 = 30$ y $p_2 = 30$.

$q_1 = 1000 - 20p_1 + 10p_2$ unidades de producto A.

Resolución:

$$E_1 q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} = -20 \cdot \frac{p_1}{1000 - 20p_1 + 10p_2} = -\frac{20p_1}{10(100 - 2p_1 + p_2)}$$

$$= -\frac{2p_1}{100 - 2p_1 + p_2}$$

$$E_2 q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = 10 \cdot \frac{p_2}{1000 - 20p_1 + 10p_2} = \frac{10p_2}{10(100 - 2p_1 + p_2)} = \frac{p_2}{100 - 2p_1 + p_2}$$

Para $p_1 = 30$ y $p_2 = 20$ se obtiene:

$$E_1 q_1 = -\frac{2 \cdot 30}{100 - 2 \cdot 30 + 20} = -\frac{60}{10} = -6 \qquad E_2 q_1 = \frac{20}{100 - 2 \cdot 30 + 20} = \frac{20}{10} = 2$$

Conclusiones:

De acuerdo con los resultados anteriores, si el precio del producto 2 se mantiene en \$20, entonces un aumento del 1% en el precio del producto 1, a partir de \$30, provoca una disminución del 6% en la demanda del producto 1. Sin embargo, si se fija el precio del producto 1 en \$30, entonces un aumento del 1% en el precio del producto 2, por encima de los \$20, hace que la demanda del producto 1 aumente en un 2%.

3.-La cantidad de cajas de un tipo de juguete que se puede fabricar semanalmente es

$q = \sqrt{kl}$ donde k es el capital empleado (en cientos de pesos) y l es el número de horas de mano de obra. Determine e interprete las elasticidades parciales de la función de producción.

Planteamiento:

k : cientos de pesos empleados en la producción semanalmente.

l : horas de mano de obra empleada.

$q = \sqrt{kl}$ cajas de juguetes fabricados semanalmente.

Resolución:

$$a) \quad E_k q = \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q} = \frac{l}{2\sqrt{kl}} \cdot \frac{k}{\sqrt{kl}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

b)

$$E_l q = \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{l}{q}$$

$$= \frac{k}{2\sqrt{kl}} \cdot \frac{l}{\sqrt{kl}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Conclusiones:

De acuerdo con los resultados anteriores, si se mantiene fijo uno de los dos factores de producción, el aumento del otro en un 1% provoca que la producción aumente aproximadamente en un 0,5%.

Diferencial total

Definición.

Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas. Se denomina

diferencial total de z a la expresión $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Este concepto se puede generalizar a funciones de más de dos variables. Para eso solo hay que tener en cuenta que dz es la suma de los productos de cada una de las derivadas parciales por el diferencial de la variable correspondiente.

Ejemplos:

1.-Sea $z = e^{xy}$. Entonces $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$.

2.-Sea $u = x^2 + y^3 + z^4$. Entonces $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$
 $= 2x dx + 3y^2 dy + 4z^3 dz$

Nótese que, en general, el diferencial es una función que depende de las mismas variables que la función original y de sus correspondientes variaciones. Por tanto, para obtener un valor numérico del diferencial total, hay que conocer el valor inicial de cada una de las variables independientes y de sus correspondientes diferenciales. El valor obtenido del diferencial total representa una aproximación de la variación que experimenta la función, o sea, $\Delta z \approx dz$. Esta aproximación será más exacta cuantos más pequeños sean los diferenciales

Ejemplo:

3.-La cantidad de producto q que se puede elaborar utilizando x unidades de materia prima A e y unidades de materia prima B viene dada por $q = xy$. Inicialmente se estaban utilizando 15 unidades de A y 20 unidades de B. ¿Cuál es la variación aproximada de la producción si aumentamos una unidad de materia prima A y la disminuimos de materia prima B?

Planteamiento:

x: unidades de materia prima A.

y: unidades de materia prima B.

q: unidades de producto.

$q=xy$ (función de producción).

Resolución: $dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = y dx + x dy$

Sustituyendo tenemos que $dq = 20 \cdot 1 + 15(-1) = 5$

Conclusión

Si la materia prima A aumenta de 15 a 16 unidades y la B disminuye de 20 a 19 unidades, la producción aumenta aproximadamente en 5 unidades de producto. El valor exacto de la variación de la función se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - q(x_0, y_0) = q(15+1, 20-1) - q(15, 20) \\ &= q(16, 19) - q(15, 20) = 16 \cdot 19 - 15 \cdot 20 = 304 - 300 = 4.\end{aligned}$$

La diferencia $dq - \Delta q = 5 - 4 = 1$ nos da el error absoluto que se comete al aproximar a

Δq mediante dq . En este caso, como $1 > 0$, concluimos que se ha cometido un error de unidad de producto por exceso.

Ejercicio: Resuelva el mismo el mismo problema anterior tomando $\Delta x = 0,2$ y $\Delta y = 0,3$

Haga un análisis del error que se comete y compruebe que la aproximación es mejor. ¿A qué usted atribuye esa mejoría?

Derivadas parciales de funciones compuestas

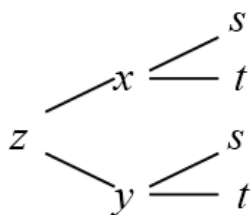
El problema que nos ocupa en este epígrafe es el cálculo de las derivadas de una función de varias variables expresada en forma compuesta.

Una función de varias variables está en forma compuesta si sus argumentos no son variables libres, sino que sus valores dependen de terceras variables.

Ejemplo:

1.- Sea $z = x + y$ donde $x = s^2 + t^2$ e $y = 2st$.

En este caso z es la *función*, s y t son las *variables independientes* y x e y son *variables intermedias* o *variables intermedias*. Para mejor comprensión, la dependencia entre las variables se representa a través de un esquema, denominado *árbol de dependencia funcional*, como el siguiente:



Para hallar el valor de una función expresada en esta forma, se les dan valores a las variables independientes. De esta forma se obtienen los valores de las variables intermedias. Luego, asignado a las variables intermedias los valores obtenidos, se obtiene el valor de la función.

Ejemplo:

2.-Sea $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ con $x = s^2 + 2st$ e $y = 2st + t^2$. Hallar f para $s = -2$ y $t = 1$.

Para $s = -2$ y $t = 1$, se obtiene que $x = (-2)^2 + 2(-2)1 = 0$ e $y = 2(-2)1 + 1^2 = -3$.

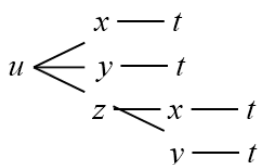
Entonces $f(0, -3) = \ln[0^2 + (-3)^2] = \ln 9$

Para calcular las derivadas, primero se confecciona el árbol de dependencia funcional. Luego, cada derivada se obtiene sumando todos los productos que resultan de derivar en cadena desde el tronco del árbol de dependencia funcional hasta las ramas que terminan en la variable de derivación. Por tanto:

3.-Calcular las derivadas de $z = e^{x+y}$ donde $x = s^2 + 2st$ e $y = 2st + t^2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^{x+y} (2s + 2t) + e^{x+y} (2t) = 2(s+t)e^{x+y} + 2te^{x+y} \\ \text{b) } \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^{x+y} (2s) + e^{x+y} (2s + 2t) = 2se^{x+y} + 2(s+t)e^{x+y} \end{aligned}$$

4.-Calcular la derivada de $u = xyz$ donde $z = 5x + 3y$, $x = 8t$, $y = t^2$



$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= yz \cdot 8 + xy \cdot 2t + xy \cdot 5 \cdot 8 + xy \cdot 3 \cdot 2t \\ &= 8yz + 2txy + 40xy + 6txy. \end{aligned}$$

En este ejemplo, solo hay una variable libre; por tanto, la derivada de u con respecto a t es ordinaria y no parcial. Lo mismo ocurre con las derivadas de x e y con respecto a t . Por eso se usó la notación de derivada ordinaria en la fórmula anterior.

Aplicaciones

Existen muchos problemas económicos en los que es necesario hallar la derivada de una función compuesta para analizar la tasa de variación de una magnitud con respecto a otra.

Ejemplo:

5.-El costo total de fabricación de dos tipos de producto es $c = 30q_1 + 0,015q_1q_2 + q_2 + 900$, donde q_1 y q_2 son las cantidades respectivas de cada uno. Las funciones de demandas son $q_1 = 9000 - p_1p_2$ y $q_2 = 2000 - p_1 - 400p_2$, donde p_1 y p_2 son los precios unitarios de cada producto. Haga un análisis de la tasa de variación del costo total con respecto al precio de cada producto cuando los mismos sean \$50 y \$2 respectivamente.

Planteamiento:

q_1 : unidades de producto 1

q_2 : unidades de producto 2

p_1 : pesos por unidad de producto 1

p_2 : pesos por unidad de producto 2

$$q_1 = 200 - p_1p_2$$

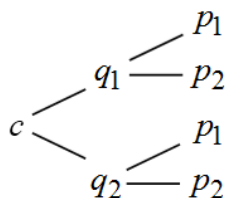
$$q_2 = 1850 - p_1 - 400p_2,$$

$$p_1 = 50$$

$$p_2 = 2$$

$$c = 30q_1 + 0,015q_1q_2 + q_2 + 900 \text{ costo total de producción (en \$)}$$

Resolución:



$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial c}{\partial p_1} &= \frac{\partial c}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial c}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = (30 + 0,015q_2)(-p_2) + (0,015q_1 + 1)(-1) \\ &= -(30p_2 + 0,015p_2q_2 + 0,015q_1 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{\partial c}{\partial p_2} = \frac{\partial c}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial c}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = (30 + 0,015q_2)(-p_1) + (0,015q_1 + 1)(-400)$$

$$= -(30p_1 + 0,015p_1q_2 + 6q_1 + 400)$$

Para $p_1 = 50$ y $p_2 = 2$, $q_1 = 200 - 50 \cdot 2 = 100$ y $q_2 = 1850 - 50 - 400 \cdot 2 = 1000$. Sustituyendo estos valores en las derivadas parciales se obtiene:

$$c) \frac{\partial c}{\partial p_1} = -(30 \cdot 2 + 0,015 \cdot 2 \cdot 100 + 0,015 \cdot 1000 + 1) = -(60 + 3 + 15 + 1) = -79$$

$$d) \frac{\partial c}{\partial p_2} = -(30 \cdot 50 + 0,015 \cdot 50 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 400) = -(1500 + 750 + 600 + 400) = -3250$$

Conclusión:

Si se mantiene el precio del producto 2 en \$2, entonces el costo disminuye aproximadamente en \$79 por cada peso que aumente el precio del producto 1 por encima de los \$50. Sin embargo, si se mantiene el precio del producto 1 en \$50, entonces el costo disminuye aproximadamente en \$3250 por cada peso que aumente el precio del producto 2 por encima de los \$2.

Derivada de funciones implícitas expresadas por una ecuación

Se dice que una función está expresada en forma implícita si la ecuación que la representa no está resuelta con respecto a la variable dependiente (la función no está despejada), o sea, la ecuación tiene la forma $F(x, y, z) = c$ donde c es una constante.

Ejemplo:

1.-La ecuación $y^3 - \ln x = 0$ representa a y como función de x ya que $y = \sqrt[3]{\ln x}$ es una función. También representa a x como función de y porque $x = e^{y^2}$ es una función.

No obstante, hay que tener cuidado porque todas las ecuaciones no representan funciones.

Ejemplo:

2.-La ecuación $e^x + y^2 + z^4 + 1 = 0$ no se satisface para ningún punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Basta darse cuenta de que el miembro izquierdo es siempre positivo. Por tanto, esta ecuación no representa a ninguna de las dos variables como función de la otra.

De acuerdo con los resultados de los ejemplos anteriores, podemos decir que para que una ecuación de la forma $F(x, y, z) = c$ representa una de las variables como función implícita de las demás, debe tener, por lo menos, una solución.

Supongamos que la ecuación $F(x, y, z) = c$ (c constante) representa a z como función de x e y , y que z es derivable con respecto a x e y . El problema ahora consiste en calcular las derivadas parciales de z con respecto a x y a y . Para eso F tiene que ser diferenciable. En ese caso:

$$dF(x, y, z) = d(c)$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

$$F_z dz = -F_x dx - F_y dy$$

Si, además, $F_z \neq 0$, entonces

$$dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$$

Pero $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Hay que tener en cuenta que, en las fórmulas anteriores, F no es la función, sino el miembro izquierdo de la ecuación, cuando el miembro derecho es una constante. En su lugar se puede usar G , H o cualquier otra letra, evitando siempre que no sea ninguna de las variables que aparecen en la ecuación para evitar confusiones. La función es z y las variables independientes son x e y .

En resumen, para calcular las derivadas de funciones expresadas en forma implícita por una ecuación, primero, se transponen hacia el miembro izquierdo de la ecuación todos los términos que contengan las variables, de este modo el miembro derecho es constante; luego se aplica la regla siguiente: *la derivada la función, con respecto a cualquiera de las variables libres, es igual al valor opuesto del cociente de la derivada del miembro izquierdo con respecto a la variable de derivación, entre la derivada del miembro izquierdo con respecto a la función.*

Ejemplo:

3.-Sea $x^2 + y^2 = 9$. Halle la derivada de y .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

4.-Sea $2xy + 3yz = 4xz$. Halle las derivadas parciales de z .

Haciendo $2xy + 3yz - 4xz = 0$ tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3yz - 4xz)}{\frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3yz - 4xz)} = -\frac{2y - 4z}{3y - 4x}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(2xy + 3yz - 4xz)}{\frac{\partial}{\partial y}(2xy + 3yz - 4xz)} = -\frac{2x + 3z}{3y - 4x}$$

Interpretación geométrica

La ecuación $F(x, y) = c$ (c constante) representa una curva en el plano xy . Si tomamos un punto (x_0, y_0) de dicha curva, entonces la pendiente de la tangente a la curva en ese punto es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)};$$

por tanto, la ecuación de la tangente es

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

o también

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Esta última fórmula permite hallar la ecuación de la tangente aún en aquellos puntos (x_0, y_0) de la curva para los cuales $F_y(x_0, y_0) = 0$. En estos puntos, la tangente es vertical.

Ejemplo:

4.-Halle la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en el punto (1; 2).

Haciendo $F = x^2 + y^2 = 5$, se obtiene $F_x = 2x$ y $F_y = 2y$. De aquí resulta que

$F_x(1;2) = 2$ y $F_y(1;2) = 4$. Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia

$x^2 + y^2 = 5$ en el punto (1; 2) es $2(x-1) + 4(y-2) = 0$ ó $x + 2y = 5$.

Esta es la recta que corta el eje x en (5; 0) y al eje y en (0; 2,5) (Fig. 4.10.1)

5.-Halle la ecuación de la tangente a la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto (2; 0).

Haciendo $G = x^2 + 4y^2 = 4$, se obtiene que $G_x = 2x$ y $G_y = 4y$.

Entonces $G_x(2;0) = 4$ y $G_y(2;0) = 0$.

Por tanto, la ecuación de la tangente es $4(x-2) + 0(y-2) = 0$ ó $x = 2$.

Esta tangente es la recta es vertical que corta al eje x en 2 (Fig. 4.10.2)

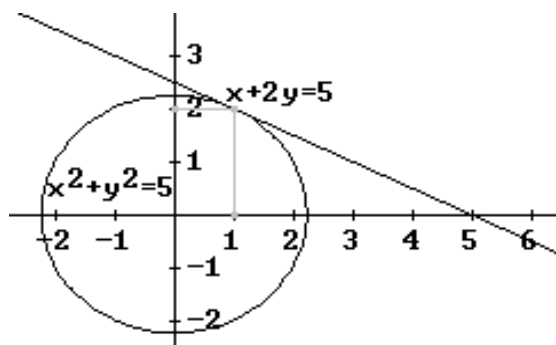


Figura 14. Ecuación de la Tangente 1.

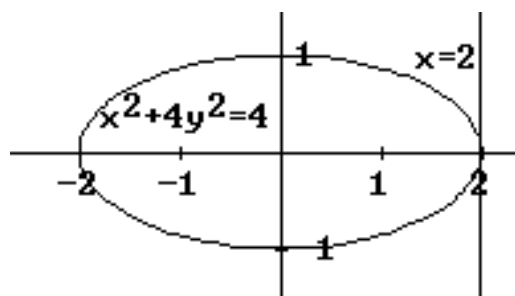


Figura 15. Ecuación de la Tangente 2.

Interpretación económica

La ecuación $F(x,y) = c$ (c constante), que expresa a y como función implícita de x , es una curva de nivel de la función $F(x,y)$. Sea (x_0, y_0) un punto de dicha curva. Entonces

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

indica la forma en que deben hacerse variar a x e y , a partir del punto (x_0, y_0) para que la función se mantenga constante, estable o invariante:

- Si, para que $F(x, y)$ se mantenga invariante, a partir del (x_0, y_0) , x e y deben variar en el mismo sentido, entonces se dice que x e y están en *relación de complemento* en ese punto. Esto ocurre cuando la derivada es positiva, o sea, en los tramos donde la curva es creciente.
- Si, para que $F(x, y)$ se mantenga estable, a partir del (x_0, y_0) , x e y deben variar en sentido contrario, entonces se dice que x e y están en *relación de sustitución* en ese punto. Esto ocurre cuando la derivada es negativa, es decir, en los tramos donde la curva es decreciente.
- Si, para que $F(x, y)$ se mantenga constante, a partir del (x_0, y_0) , cuando una de las variables cambia, la otra debe permanecer fija, entonces se dice que dichas variables son *independientes entre sí* en ese punto. Esto ocurre cuando la derivada es cero, o sea, en los puntos estacionarios de la curva.

Ejemplos:

6.-Sea $c = 8q_1 + 10q_2$ el costo total de fabricación de dos productos, donde q_1 y q_2 son sus respectivos niveles de producción. Actualmente $q_1 = 100$ y $q_2 = 80$.

- Determine el costo total de fabricación.
- Si la empresa decide aumentar la cantidad de producto 2, ¿de qué forma hay que variar la cantidad del producto 1 para no alterar el costo?

Planteamiento:

q_1 : unidades de producto 1.

q_2 : unidades de producto 2.

$c = 8q_1 + 10q_2$ costo total de producción (en \$)

$q_1 = 100$; $q_2 = 80$

Resolución:

a) $c(100;80) = 8 \cdot 100 + 10 \cdot 800 = 1600$.

b) $8q_1 + 10q_2 = 1600$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = - \frac{\frac{\partial}{\partial q_2}(8q_1 + 10q_2)}{\frac{\partial}{\partial q_1}(8q_1 + 10q_2)} = - \frac{10}{8} = -1,25$$

Conclusiones:

- a) El costo total de fabricación de 100 unidades de producto 1 y 80 unidades de producto 2 es de \$1600.
- b) Si se decide aumentar la cantidad del producto 2, entonces, para mantener el costo total en \$1600, hay disminuir 1,25 unidades de producto 1 por cada unidad de producto 2 que se aumente por encima de las 80 unidades.

7.-Sea $q = 5x^2 + 10xy - 8y^2$ la cantidad de producto que se puede elaborar con x kg de materia prima A e y kg de materia prima B. Analice si estas materias primas son sustitutivas o complementarias y de qué forma lo hacen para que la producción permanezca invariante.

Planteamiento:

x : kg de materia prima A

y : kg de materia prima B

$x_0 = 10$; $y_0 = 10$

$q = 5x^2 + 10xy - 8y^2$ unidades de producto.

Resolución:

$q(10;10) = 5 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10 \cdot 10 - 8 \cdot 10^2 = 700$. Entonces para estos niveles de insumo

$q = 5x^2 + 10xy - 8y^2 = 700$.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{q_x}{q_y} = - \frac{10x + 10y}{10x - 16y} = - \frac{5x + 5y}{5x - 8y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(10;10)} = - \frac{50 + 50}{100 - 160} = - \frac{100}{-60} = \frac{10}{3}$$

Conclusión:

Para estos niveles de insumo, las materias primas están en relación de complemento, porque para mantener el nivel de producción 700 unidades de producto, hay que aumentar 10 kg de materia prima B por cada 3 kg de materia prima A que se aumente.

Derivada de funciones implícitas definidas por sistemas de ecuaciones

Para poder abordar la derivación de funciones implícitas dadas por un sistema de ecuaciones, es necesario introducir el concepto de *jacobiano*.

DEFINICIÓN. Sean f, g, h funciones derivables con respecto a x, y, z . Entonces se llama *jacobiana* de f, g, h con respecto a x, y, z al determinante funcional

$$J\left(\frac{f, g, h}{x, y, z}\right) = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, consideremos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas en el cual $m < n$

Dicho sistema, bajo determinadas condiciones define m de las incógnitas contenidas en él, como función de las $m - n$ restantes, o sea, cada ecuación define una función.

Sin perder generalidad, supongamos que el sistema ecuaciones $\begin{cases} f(x, y, z, u, v) = 0 \\ g(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$ define a las variables u, v como función de x, y, z . Entonces las derivas de u se calculan así:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{f, g}{x, v}\right)}{J\left(\frac{f, g}{u, v}\right)} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{f, g}{y, v}\right)}{J\left(\frac{f, g}{u, v}\right)} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{J\left(\frac{f, g}{z, v}\right)}{J\left(\frac{f, g}{u, v}\right)}$$

Como recurso nemotécnico nótese que cada derivada es un cociente de jacobianas precedidos de un signo negativo. El denominador de dichos cocientes es la jacobiana de los miembros izquierdos de las ecuaciones con respecto a las variables dependientes: u, v ; mientras que la jacobiana del numerador se obtiene cambiando, en la jacobiana del denominador, la variable que se va a derivar, por la variable respecto a la que se va a calcular la derivada.

Ejemplo:

1.-Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} u^2 - 2v + 5x = 2 \\ u + v^2 - 2y = 1 \end{cases}$, calcular $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$.

En este caso se tiene que $\begin{cases} f = u^2 - 2v + 5x - 2 \\ g = u + v^2 - 2y - 1 \end{cases}$. Por tanto:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = -\frac{J\left(\frac{f,g}{x,v}\right)}{J\left(\frac{f,g}{u,v}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}} = -\frac{10v-0}{4uv+2} = -\frac{5v}{2uv+1}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x = -\frac{J\left(\frac{f,g}{u,y}\right)}{J\left(\frac{f,g}{u,v}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}} = -\frac{-4u}{4uv+2} = \frac{2u}{2uv+1}$$

Funciones homogéneas

Muchas de las funciones que se utilizan en la Economía para expresar el costo, la ganancia, el ingreso, la producción, etc., tienen la propiedad de ser homogéneas. Veamos entonces cuándo una función es homogénea, qué propiedades tiene y cómo se utilizan estas propiedades en el análisis económico.

Definición.

Una función $z = f(x, y)$ es *homogénea de grado α* , si para todo punto $(x, y) \in \text{Dom } f$ y todo $t > 0$ tal que $(tx, ty) \in \text{Dom } f$ se cumple que $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

Esta definición se puede generalizar una función con un número mayor de variables. Basta darse cuenta de que una función es homogénea de grado α si cuando todas las variables se hacen variar en la misma en la misma proporción t , la función se varía t^α veces.

El grado de homogeneidad de una función puede ser un número cualquiera: positivo, cero, negativo, entero o no. Esto significa que el grado de homogeneidad de una función no indica un orden como en el caso de los polinomios. Por eso es que si, por ejemplo, una función es homogénea de grado 2, es incorrecto decir que dicha función es homogénea de segundo grado.

Ejemplo:

1.-Analizar si las siguientes funciones son homogéneas y determine el grado.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x, y).$$

Por tanto, esta función es homogénea de grado 2. Esto significa que, si x e y varían proporcionalmente t veces, entonces la función vará t^2 veces. En particular, si se duplican las variables, entonces $f(2x, 2y) = 2^2 f(x, y) = 4 f(x, y)$, es decir, el valor de la función se cuadruplica.

$$b) f(x, y, z) = x + 2y + 3z.$$

$$f(tx, ty, tz) = tx + 2ty + 3tz = t(x + 2y + 3z) = t f(x, y, z).$$

Por tanto, la función es homogénea grado 1. Esto significa que la función varía en la misma proporción que las variables independientes. Por ejemplo, triplicando las variables, $f(3x, 3y, 3z) = 3 f(x, y, z)$, se triplica también el valor de la función.

$$c) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = t^0 f(x, y).$$

Esta función es homogénea de grado 0. Eso significa que esta función no se afecta ante variaciones proporcionales de las variables. Por ejemplo, si las variables se aumentan 5 veces, $f(5x, 5y) = 5^0 f(x, y) = f(x, y)$, entonces la función mantiene su valor.

$$d) f(x, y, z) = \frac{x+y-z}{x^3+y^2z}.$$

$$f(tx, ty, tz) = \frac{tx+ty-tz}{(tx)^3+(ty)^2tz} = \frac{t(x+y-z)}{t^3(x^3+y^2z)} = t^{-2} \frac{x+y-z}{x^3+y^2z} = t^{-2} f(x, y, z)$$

La función es homogénea de grado -2 . Esto significa que, si las variables se aumentan proporcionalmente t veces, la función se reduce t^{-2} veces. Por ejemplo, si se duplican las variables se obtiene $f(2x, 2y, 2z) = 2^{-2} f(x, y, z) = \frac{1}{4} f(x, y, z)$, o sea, la función se reduce a la cuarta parte.

En todos los ejemplos anteriores hemos puesto funciones homogéneas, sin embargo, no todas las funciones son homogéneas. Es fácil darse cuenta cuando una función es homogénea. Para eso se siguen los siguientes criterios:

- Si la función está compuesta por una suma, entonces todos los sumandos deben ser homogéneos del mismo grado.
- Si la función es un cociente, el numerador y el denominador tienen que ser homogéneos (no necesariamente del mismo grado).

Ejemplos:

2.-Analice si la función $f(x, y) = xy + x + y$

Para todo $t > 0$ se tiene que $f(tx, ty) = (tx)(ty) + tx + ty = t^2xy + tx + ty = t(txy + x + y)$

El primer sumando es homogéneo de grado 2, mientras que los otros dos, son homogéneos de grado 1; por tanto, queda una t multiplicando a x y y que no se puede sacar como factor común. Por eso, la función no es homogénea.

Propiedades

Propiedad 1: Toda función homogénea de grado cero se puede escribir como función de x/y o como función de y/x , o sea, $f(x, y) = F(y/x)$ o $f(x, y) = G(x/y)$.

Ejemplo:

3.-Sea $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. Dividiendo cada término por x obtenemos $f(x, y) = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$.

Haciendo $z = \frac{y}{x}$ obtenemos $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Análogamente se procede para escribir f en función de x/y .

Propiedad 2. Si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n , entonces sus derivadas parciales de orden k son funciones homogéneas de grado $n-k$.

Ejemplo:

4.-La función $f(x, y) = x^3y + x^2y^2$ es homogénea de grado 4 y sus derivadas parciales

$f_x = 3x^2y + 2xy^2$ y $f_y = x^3 + 2x^2y$ son funciones homogéneas de grado $4-1=3$ (Pruébalo).

Teorema (de Euler). Si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado α , entonces se cumple

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x, y)$$

Ejemplo:

5.-La función $f(x, y) = x^3y + x^2y^2$ del ejemplo anterior es homogénea de grado 4.

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= x(3x^2y + 2xy^2) + y(x^3 + 2x^2y) = 3x^3y + 2x^2y^2 + x^3y + 2x^2y^2 \\ &= 4x^3y + 4x^2y^2 = 4(x^3y + x^2y^2) = 4f(x, y). \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 4f(x, y).$$

Esta es la identidad de Euler para esta función.

Aplicaciones

Los ejemplos que pondremos a continuación muestran casos concretos de funciones usadas en la Economía que tienen la propiedad de ser homogéneas. Aquí utilizaremos variaciones porcentuales; por tanto, veamos que significa que una magnitud varía en porcentaje determinado.

Si x aumenta en un 50%, entonces su nuevo valor sería $x + \frac{50}{100}x = (1 + 0,5)x = 1,5x$, o sea, x aumenta 1,5 veces. Si, por el contrario, x disminuye en un 25%, el nuevo valor de x será $x - \frac{25}{100}x = (1 - 0,25)x = 0,75x$, es decir, 0,75 veces el valor inicial y eso quiere decir que la magnitud se reduce al 75% (o a las $\frac{3}{4}$ partes) del valor inicial.

Ejemplos:

6.-La función de producción de una empresa es $q = 2\sqrt[3]{kl^2}$ donde q es la cantidad de producto fabricada, k es el capital invertido y l el total de obreros empleados. Analice qué ocurre con la producción si el capital y fuerza de trabajo aumentan en un 50%.

Planteamiento:

k : capital invertido (en \$)

l : obreros empleados

$q = 2\sqrt[3]{kl^2}$ unidades de producto

$t = 1,5$ factor de proporcionalidad

Resolución:

$$q(tk, tl) = 2\sqrt[3]{(tk)(tl)^2} = 2\sqrt[3]{t^3kl^2} = t(2\sqrt[3]{kl^2}) = tq(k, l).$$

Esta función de producción es homogénea de grado 1.

$$q(1,5k; 1,5l) = 1,5q(k, l)$$

Conclusiones

- Eso significa que, si el capital y la fuerza de trabajo aumentan proporcionalmente 1,5 veces, entonces la producción aumenta 1,5 veces también, o sea, si los factores de producción aumentan en un 50%, la producción también aumenta en un 50%.
- La identidad de Euler para esta función es $k \frac{\partial q}{\partial k} + l \frac{\partial q}{\partial l} = q(k, l)$. Esto quiere decir que la producción total es la suma de los productos de la cantidad utilizada de cada factor de producción por el rendimiento de dicho factor.

7.-Supongamos que un fabricante está dispuesto a vender q unidades de un producto a un precio p . Si el precio aumenta en un 20% y el fabricante decide ampliar la oferta en esa misma proporción, ¿qué ocurre con el ingreso?

Planteamiento:

q : unidades de producto ofertadas

p : precio de cada unidad de producto (\$/u)

$$I = pq \text{ ingreso total (en \$)}$$

$t = 1,2$ factor de proporcionalidad

Resolución:

$I(tp, ql) = (tp)(tq) = t^2 pq = t^2 I(p, q)$. El ingreso es una función homogénea de grado 2.

$$I(1,2k; 1,2l) = (1,2)^2 I(p, q) = 1,44I(p, q)$$

Conclusión

Si el precio y la oferta aumentan proporcionalmente 1,2 veces, el ingreso aumenta 1,44 veces. Eso significa que cuando el precio y la oferta aumentan en un 20%, entonces el ingreso aumenta en un 44%.

8.-Sean p_1 y p_2 los precios de dos productos y $q_1 = \frac{5000}{p_1 p_2}$ y $q_2 = 50\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$ sus respectivas demandas. Analice el cambio que se produce en las demandas si se duplican los precios de ambos productos.

Planteamiento:

p_1 : dólar por unidad de producto 1

p_2 : dólar por unidad de producto 2

$$q_1 = \frac{5000}{p_1 p_2} \text{ unidades de producto 1}$$

$$q_2 = 50\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \text{ unidades de producto 2}$$

$t = 2$ factor de proporcionalidad

Resolución:

$$a) \quad q_1(tp_1, tp_2) = \frac{5000}{tp_1 tp_2} = \frac{5000}{t^2 p_1 p_2} = t^{-2} \frac{5000}{p_1 p_2} = t^{-2} q_1(p_1, p_2)$$

$$b) \quad q_2(tp_1, tp_2) = 50\sqrt{\frac{tp_1}{tp_2}} = 50\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = q_2(p_1; p_2)$$

Para $t = 2$ se obtiene:

$$c) \quad q_1(2p_1, 2p_2) = 2^{-2} q_1(tp_1, tp_2) = \frac{1}{4} q_1(p_1, p_2)$$

$$d) \quad q_2(2p_1, 2p_2) = q_2(p_1; p_2)$$

Conclusiones:

Si se duplican los precios, entonces la demanda del producto 1 se reduce a la cuarta parte, mientras que la demanda del producto 2 se mantiene igual (no afecta para ningún cambio proporcional en los precios).

Conclusiones del capítulo

La función de varias variables es una extensión natural de la función de una variable, permitiéndonos estudiar y comprender relaciones complejas entre múltiples entradas y salidas.

Durante este capítulo, se exploran conceptos clave como el dominio, el rango y la representación gráfica de funciones de varias variables, lo que nos proporciona una comprensión intuitiva de su comportamiento en el espacio.

El análisis de funciones de varias variables implica estudiar la variación de la función en diferentes direcciones, lo que nos lleva a conceptos como las derivadas parciales y el vector gradiente, que son herramientas fundamentales para comprender el comportamiento local de la función.

La identificación de puntos críticos y la determinación de la matriz *hessiana* nos permiten clasificar los puntos críticos como máximos, mínimos o puntos de silla, lo que proporciona información valiosa sobre la estructura de la función y la ubicación de extremos relativos.

El teorema del valor medio para funciones de varias variables es una herramienta importante que nos permite relacionar el cambio de la función en un punto con su variación en un intervalo, lo que proporciona información sobre la existencia de puntos críticos y extremos relativos.

Al estudiar funciones de varias variables, también nos encontramos con conceptos como la continuidad, la existencia de límites y la diferenciabilidad, que son fundamentales para comprender el comportamiento de la función en su conjunto y en puntos específicos del dominio.

Este capítulo sienta las bases para el estudio de campos como el cálculo vectorial, la optimización y la geometría diferencial, que tienen una amplia gama de aplicaciones en la física, la ingeniería, las ciencias de la computación y otras disciplinas científicas y técnicas.

Conclusiones

"Propiedades y operaciones con funciones elementales" ofrece una exploración detallada y accesible de conceptos fundamentales en el estudio de las funciones matemáticas, proporcionando una base sólida para comprender y aplicar principios clave en diversos contextos.

A lo largo del libro, se ha examinado una variedad de funciones elementales, incluyendo funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, destacando sus propiedades distintivas y su importancia en la modelización y resolución de problemas prácticos.

Además de estudiar las propiedades individuales de cada tipo de función, hemos explorado cómo estas funciones interactúan entre sí a través de operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, proporcionando herramientas para combinar y manipular funciones de manera efectiva.

El libro también ha abordado conceptos avanzados como la composición de funciones, las funciones inversas y la resolución de ecuaciones y desigualdades, mostrando cómo estas operaciones pueden utilizarse para analizar y resolver una amplia variedad de problemas matemáticos.

A través de ejemplos concretos, ejercicios prácticos y aplicaciones en contextos del mundo real, hemos demostrado la relevancia y utilidad de los conceptos y técnicas presentadas en el libro, destacando su papel crucial en disciplinas como la física, la ingeniería, la economía y la ciencia de datos.

Con un enfoque en la claridad expositiva y la comprensión conceptual, "Propiedades y Operaciones con Funciones Elementales" es una herramienta invaluable para estudiantes, profesionales y entusiastas de las matemáticas que buscan fortalecer su comprensión de este tema fundamental.

Al proporcionar una base sólida en funciones elementales y sus propiedades, este libro prepara a los lectores para exploraciones más avanzadas en matemáticas y disciplinas relacionadas, alentando un mayor interés y aprecio por la belleza y la utilidad de esta área de estudio.

Recomendaciones para los lectores:

- Aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas reales.
- Continuar estudiando las funciones matemáticas para profundizar en sus propiedades y aplicaciones.

- Utilizar software matemático para facilitar el análisis y la manipulación de funciones.

Referencias

- Amufan, L. (2010). Matemática intermedia. U.S. Editorial de Pearson.
- Espinoza, E. (2004). Álgebra preuniversitaria (Vol. II, 1.^a ed.). Lima.
- Espinoza, E. (2000). Números complejos y ecuaciones polinómicas (2.^a ed.). Lima.
- Grossman, S., & Stanley, I. (2008). Álgebra lineal (6ta.^a ed.). México.
- Kalnin, R. A. (1988). Álgebra y funciones elementales. Editorial Mir.
- Kolman, B. (1997). Estructuras de matemáticas discretas. Editorial Prentice-Hall.
- Kletenik, D. (1979). Problemas de geometría analítica. Editorial Mir.
- Lehmann, Ch. (1993). Geometría analítica. Editorial Limusa S.A.
- Paredes, A. (2006). Razonamiento lógico – matemático. Editorial San Marcos.
- Rodríguez, R. A., & Aliaga, C. S. (2015). Elementos de matemática básica para carreras universitarias [Libro digital]. SUPERSOF.
- Salinas, G. (2012). Álgebra superior (1.^a ed.). Editorial Soluciones Gráficas.
- Yakovliev, G. N. (1982). Geometría. Editorial Mir.

Bibliografía

- B.C.1. Fundamentos de matemática. (2007). Editorial ICM-ESPOL. (Código 9789978310311)
- B.C.2. <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/6374/dragon3.html>.
- B.C.3. <http://www.etsimo.uniovi.es/usr/adolfo/algebra1.html>.
- Kudriavtsev, L. (1989). Curso de análisis matemático. Editorial MIR.
- Kudriavtsev, L. (1989). Problemas de análisis matemático. Editorial MIR.
- Demidovich, B. (1980). Problemas y ejercicios de análisis matemático. Editorial MIR.
- Fikhtengolts, G. M. (1965). The fundamentals of mathematical analysis (Vols. 1-2). Pergamon Press.
- Lipschutz, S. Teoría de funciones y temas afines.

ISBN: 978-9942-7194-4-7



Casa Editora